2

IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

Autor:	Daniel de Jesus Silva
Título do projeto:	Ressignificação do cálculo na licenciatura
Início do projeto:	03/2019
Instituição de ensino superior:	Universidade do Estado da Bahia (Uneb)
Faculdade/Programa/Departamento/Setor:	Departamento de Ciências Humanas, *campus* VI
Curso onde o projeto foi desenvolvido:	Licenciatura em matemática
Vinculação do projeto:	Ensino
Disciplina/módulo/componente curricular do curso de licenciatura em que o projeto foi desenvolvido:	Cálculo Diferencial e Integral II
Natureza da disciplina:	Obrigatória
Relação com componentes curriculares da educação básica:	Ciências da natureza e matemática: matemática
O projeto tem relação com nível de ensino:	Ensino fundamental II
Especificidade no projeto:	História da matemática e tecnologias

Premiado DANIEL DE JESUS SILVA[1]

RESSIGNIFICAÇÃO DO CÁLCULO NA LICENCIATURA

RESUMO

Este relato trata de práticas pedagógicas numa perspectiva problematizada de um professor de Cálculo que aponta como repensar o lugar dessa disciplina, apropriando-se da história da matemática, numa inter-relação com variadas tecnologias, de modo a favorecer uma relação dialética entre a teoria e a prática docente, a (re)construir o conhecimento da Integral e a propiciar reflexões didáticas para favorecer a formação inicial do professor de matemática. As participações do docente, dos licenciandos em matemática do *campus* VI da Universidade do Estado da Bahia e dos alunos da educação básica foram alicerçadas pelo desenvolvimento da atividade "Ressignificando o cálculo de áreas" como uma das etapas do projeto de ensino "Ressignificação do cálculo na licenciatura". O resultado da experiência indica que o elo da história da matemática com tecnologias diversas favorece trabalhar conteúdos matemáticos e auxiliar na interação entre os envolvidos, contribuindo para a formação inicial do professor de matemática da educação básica. Espera-se, por meio deste trabalho, que o docente possa compreender a importância do uso coerente da história da matemática e das variadas tecnologias, admitindo-os como elementos importantes para sua prática pedagógica, a fim de tornar o estudo de matemática prazeroso, instigante, e o seu aprendizado efetivo, contribuindo para, além de favorecer a formação docente, desconstruir o preconceito de que a matemática constitui uma disciplina abstrata e difícil.

1 Universidade do Estado da Bahia (Uneb), *campus* VI Caetité-BA. *danielinbcte@hotmail.com*

JUSTIFICATIVA

Ao considerar que a aprendizagem é constituída pelo processo interativo, tanto entre professores e alunos quanto deles com variados recursos, para proporcionar uma melhor compreensão do que se estuda das disciplinas e também do meio social e do mundo, é importante que o professor, em qualquer nível de ensino, promova estratégias que possibilitem o desenvolvimento de seus estudantes enquanto sujeitos ativos, interativos e construtores de conhecimento. Assim, os alunos, tanto da educação básica quanto da licenciatura, precisam ser motivados a produzir conhecimento e não apenas a consumir conhecimento previamente preparado. Escutar, copiar, decorar, fazer exercícios mecânicos, fazer provas tem sido a rotina naturalizada da maioria dos alunos em todos os níveis de ensino, o que resulta na formação de profissionais com dificuldades de responder aos desafios postos pela sociedade. E se esses profissionais em formação também forem professores? A replicação de metodologias tradicionalistas pode formar professores apenas replicadores das mesmas práticas.

Nos cursos de formação inicial de professores de matemática, não raro, estudantes criam forte receio da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Eles preconcebem a ideia de essa disciplina ser muito difícil, em decorrência da adoção de metodologia de ensino respaldada apenas na exposição de conteúdo e resolução de longas listas de exercícios. Essa abordagem exige respostas repetitivas e mecânicas que, muitas vezes, não são suficientes para a compreensão de todos. Além disso, não serve de motivação para o futuro professor de matemática da educação básica explorar o leque de possibilidades aberto pelas pesquisas em ensino no campo da educação matemática. Como esclarecem Fiorentini e Oliveira (2013, p. 931):

> O excesso de formalidade, a supervalorização do saber acadêmico na sua forma abstrata, em contraste com as formas que o conhecimento matemático adquire no processo de aprendizagem no contexto escolar, certamente cria [*sic*] obstáculos ao bom desempenho do professor na prática escolar. Não se trata de desvalorizar o conhecimento acadêmico nem de reduzi-lo, mas, sim, de reconhecer a necessidade de o professor desenvolver um repertório de estratégias e recursos vinculados ao processo de construção escolar do saber matemático. A matemática acadêmica, predominante nos cursos de licenciatura, distancia os futuros professores dos modos próprios de crianças e jovens da escola básica fazerem matemática, de mobilizá-la e comunicá-la, sendo essa uma etapa fundamental à formação matemática dos alunos.

A superação desse quadro exige um contínuo esforço e tem como passo inicial uma nova compreensão do processo formativo e da prática pedagógica de professores que ensinam na educação básica e também na graduação. Diante dessa realidade, o professor deve assumir um papel decisivo: passar a se preocupar com o aprender significativo, no qual a motivação pelo saber está entrelaçada com a visão crítica do que se estuda. Dessa forma, o professor precisa abrir caminhos para uma prática que leve à construção do conhecimento, tanto para o docente como para o discente.

Diante disso, surgiram os primeiros questionamentos sobre a necessidade de utilizar uma proposta de trabalho para um processo de ensino-aprendizagem consistente, baseado numa relação de proximidade e parceria entre professor e estudantes, aspectos fundamentais para a conquista do pensamento crítico, criativo e reflexivo, da autonomia e do protagonismo, bem como de competências sociais e profissionais dos licenciandos. Nesse sentido, optamos por uma prática pedagógica pautada numa abordagem "problematizada" (GIRALDO, 2018) que, em particular no contexto de formação inicial/profissional de professores, promove desafios que mobilizam o engajamento dos estudantes e o desenvolvimento de posturas investigativas, críticas e reflexivas, potencializando o processo de construção do conhecimento matemático, sem perder de vista os aspectos formais desse conhecimento, ou seja, dos conceitos matemáticos envolvidos.

Nessa prática de ensino, destaca-se o uso da história da matemática numa inter-relação com as variadas tecnologias em atividades investigativas. Desse modo, história e tecnologias apresentam-se como elementos que favorecem a proposição de desafios, reconstruindo o desenvolvimento da matemática, ao mesmo tempo que se (re)constrói o conceito matemático envolvido. Isso se insere em uma prática educativa que acredita que os discentes não aprendem por mera repetição, mas sim por meio do processo construtivo, percebendo as necessidades e os processos que impulsionaram, sistematizaram e formalizaram os conteúdos estudados em sala de aula. Vale ressaltar que a história à qual nos alinhamos não se restringe à reprodução de anedotas, visando a "motivar" o interesse dos alunos, mas sim procura reinventar o ambiente "problemático" no qual alguns questionamentos conduziram o desenvolvimento de conceitos matemáticos (ROQUE, 2012; ROQUE; CARVALHO, 2012). O sentido de tecnologia empregado para o contexto nesse projeto engloba todo e qualquer aparato utilizado como recurso didático, desde um simples lápis até recursos digitais (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2016; MISHRA; KOEHLER, 2006).

Nessa perspectiva, foi planejada uma sequência de ações para o desenvolvimento de atividades investigativas em um projeto de ensino que intenciona ressignificar o lugar do Cálculo na licenciatura em matemática. Nesse relato, destacaremos uma das etapas intitulada "Ressignificando o cálculo de áreas", em que as práticas formativas proporcionaram aos alunos viajar no tempo até algumas antigas civilizações e perceber as necessidades de calcular áreas de regiões irregulares. Ao fazerem isso, a história do Cálculo foi "descortinando", criando um ambiente "problemático" (ROQUE; GIRALDO, 2014) e propício para que os alunos se sentissem como personagens capazes de redescobrir o algoritmo da Integral, ao mesmo tempo que discussões e reflexões eram instauradas com vistas ao ensino na educação básica.

CONTEXTO EM QUE O TRABALHO ESTÁ INSERIDO

Quem são os formadores dos futuros professores de matemática? Não nos esquecendo dos professores regentes, das escolas onde ocorrem os estágios supervisionados, todos os docentes, inclusive os que ensinam as disciplinas específicas de matemática, por exemplo, Cálculo, têm a tarefa de formar o professor de matemática da educação básica (FIORENTINI, 2005).

Essa responsabilidade foi reconhecida pelo matemático Felix Klein (1908), que há mais de 100 anos apontava uma dicotomia entre a matemática acadêmica e a escola básica. Atualmente, ao pensar uma aproximação entre esses dois espaços, considerando que é para ensinar na educação básica que se forma inicialmente o professor de matemática, uma pergunta ganha conotação importante: qual é o lugar do componente curricular Cálculo em uma licenciatura em matemática?

De acordo com Moreira e Ferreira (2013, p. 1001):

> [...] podemos perceber que, na medida em que se avança na concepção de conhecimento matemático profundo para a formação do professor como um conhecimento plural, envolvendo as especificidades dadas pela matemática escolar, mas também as questões específicas do ensino e da aprendizagem dessa disciplina na educação básica, entre outros elementos, novas questões surgem na caracterização do lugar do conhecimento matemático na licenciatura.

Em relação à caracterização desse lugar, os saberes associados a certas práticas pedagógicas emergentes na educação matemática escolar, tais como o uso da história da matemática, das tecnologias, das investigações matemáticas, entre outros, devem ser considerados, principalmente por se tratar de formação inicial de professores. Por exemplo: Qual o lugar a ser ocupado pela história e diversificadas tecnologias nas disciplinas de Cálculo em cursos de licenciatura? Alinhamo-nos com a perspectiva de que tais saberes devem perpassar o trabalho em disciplinas que já compõem a grade curricular das licenciaturas, em vez de apenas serem trabalhados em disciplinas específicas, como se fossem caminhos desconexos que o futuro professor poderá seguir, como defendem diversos autores no campo da educação matemática (e.g. MOREIRA; FERREIRA, 2013).

Questões que se referem aos professores formadores nas universidades e ao trabalho de desenvolvimento profissional do professor de matemática em formação inicial se colocam dentro do tema proposto: como é possível sistematizar, incluir no processo de formação na licenciatura os conhecimentos de Cálculo que afloram nesse tipo de trabalho que esperamos que seja desenvolvido pelos futuros professores de matemática? Pensando nessa questão, acreditamos que o ponto de partida para romper com a dicotomia entre academia e escola é romper com a dicotomia entre as ditas áreas dentro das universidades. De acordo com Moreira e Ferreira (2013, p. 1001), “boa parte dos grandes embates teóricos e práticos concernentes às caracterizações de lugares para a matemática nos currículos das licenciaturas, no Brasil e no mundo, ao longo dos últimos 30 anos, pode ser vista como disputas por hegemonia entre visões que se situam em vertentes distintas”.

Nesse sentido, distanciamentos entre matemáticos e educadores matemáticos desfavorecem a formação docente, criando matemáticas desconectadas, a saber: a matemática superior, ensinada de um modo cristalizado, pronta e acabada, resulta em uma matemática de *status*; por outro lado, fica a falsa ideia de que, em relação à matemática elementar, que será ensinada na escola, os licenciados precisam aprender métodos de como ensiná-la.

Uma crítica que discentes fazem é apontar a dicotomia na prática dos professores da matemática universitária para as práticas de atuação que se esperam deles como futuros professores. Percebe-se que a tendência natural ao ensinar é replicar a prática dos seus professores (FIORENTINI, 2005). Nesse sentido, o grande desafio é como ministrar o componente curricular Cálculo estruturado em matemáticas e práticas problematizadas, proporcionando reflexões e aproximações entre conteúdos específicos e didática e entre o licenciando e a escola básica.

No desenvolvimento das atividades que alicerçam o projeto, utilizando como elementos problematizadores a história da matemática e recursos tecnológicos variados, objetivamos contribuir para uma prática pedagógica inovadora. As atividades propostas para as investigações ocorreram com a participação de cinco estudantes remanecentes, numa turma de Cálculo II do curso de Licenciatura em Matemática, do Departamento de Ciências Humanas da Universidade do Estado da Bahia (Uneb), *campus* VI-Caetité, durante o 1º período de 2019. Assim, esse projeto teve um caráter exploratório, sustentado na participação direta da situação de ensino e de aprendizagens, e o mesmo ocorreu em quatro ambientes: nas salas de aulas regulares, no jardim do *campus* VI-Uneb, extraclasse (em casa) e em escolas da educação básica (Colégio Estadual Tereza Bordes de Cerqueira e Grupo Escolar Senador Ovídeo Teixeira).

OBJETIVOS

Objetivo geral

- Compreender como o uso da história da matemática numa inter-relação com tecnologias em atividades investigativas favorece a aprendizagem de conceitos e definições de cálculos de áreas por meio da Integral, propiciando saberes de matemática para o ensino na educação básica.

Objetivos específicos

- Conhecer as origens da necessidade do cálculo de áreas e da Integral.
- Compreender o processo de sistematização e formalização do algoritmo da Integral.
- Conhecer a definição de Integral e examinar algumas de suas propriedades.
- Conhecer o Teorema Fundamental do Cálculo e usá-lo para resolver problemas práticos.
- Caracterizar a prática pedagógica do professor que utiliza a história da matemática e tecnologias em atividades investigativas na sua atuação docente na educação básica e na superior.
- Utilizar recursos manipuláveis para calcular áreas na atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”.

- Verificar a contribuição da metodologia pautada em uso da história da matemática e de tecnologias em atividades investigativas para a construção do conhecimento de cálculo de áreas.
- Proceder discussões com base na literatura acadêmica sobre recursos e metodologias didáticas para o ensino de matemática na educação básica.
- Experenciar práticas pedagógicas docentes na educação básica.

CONTEÚDOS CURRICULARES PRIORIZADOS

Ao desenvolver este projeto de ensino, dois aspectos figuraram como importantes: cumprir a ementa e conteúdos programáticos da componente curricular; e abordar tais conteúdos favorecendo práticas formativas. Para tanto, alinhamo-nos a Davis e Simmt (2006) na perspectiva de que o saber do professor de matemática deve contemplar, de forma indissociável, o saber sobre a matemática estabelecida e o saber sobre os processos sociais e históricos por meio dos quais a matemática é produzida. Para esses autores, os saberes de matemática para o ensino não são determinados por estruturas fixas prescritivas, mas sim pela articulação entre categorias mais estáveis (conceitos matemáticos, currículo) e mais dinâmicas (coletividade da sala de aula, entendimento subjetivo) do conhecimento matemático, entendidas como indissociáveis. Além disso, de acordo com Giraldo (2018, p. 40):

> Entendemos a escola como um lugar de produção de saberes, e não simplesmente de aquisição ou de transmissão de conhecimentos estabelecidos. Consideramos que tal entendimento tem implicações cruciais nos argumentos para (re)pensar as formas de exposição da matemática na escola; bem como no reconhecimento do ser professor como uma atividade profissional, que está associada a uma rede complexa de práticas e saberes específicos, isto é, que se estabelece a partir de uma epistemologia própria.

As práticas de ensinar conteúdos de matemática, tanto na escola como na universidade, têm sido largamente dominadas por paradigmas de exposição naturalizada, aqueles que se baseiam apenas na consideração da matemática estabelecida, como um corpo de conhecimento pronto e acabado, sendo regido por um modelo de ensino cristalizado. A exposição problematizada, em contrapartida, corresponde a uma concepção da matemática com base em seus vários processos sociais de produção, "o que inclui tanto os processos históricos de produção de conhecimento, que levaram às formas como a matemática está estabelecida hoje, como os processos de produção e mobilização de saberes nos contextos sociais escolares" (GIRALDO, 2018, p. 41).

Para iniciarmos os estudos dos conteúdos por uma perspectiva problematizada, por elementos históricos e tecnológicos, a antidiferenciação, operação relacionada com a diferenciação, foi tratada, previamente, como preparação para seu uso na integração, conforme plano de curso da disciplina. Com o desenvolvimento da atividade "Ressignificando o cálculo de áreas", definimos a área de uma região plana como um novo tipo de limite e reconstruímos a definição de uma Integral Definida em termos desse limite. Para as discussões coletivas em sala de aula, os discentes fizeram uma revisão bibliográfica sobre o método da exaustão e da soma de Riemann.

Abordamos algumas propriedades da Integral Definida e por fim provamos o Teorema Fundamental do Cálculo, o que nos possibilitou relacionar a Integral por meio do cálculo da antiderivada. A reconstrução desse valioso recurso pelos alunos se deu pela necessidade prática de calcular áreas de uma região plana não poligonal.

De acordo com Hoffmann (2015, p. 349), para determinar a área de uma região não poligonal usamos o seguinte princípio geral: "Quando estiver diante de um problema desconhecido, procure relacioná-lo com um problema conhecido. Nesse caso particular, podemos não saber calcular a área sob a curva dada, mas sabemos calcular a área de um retângulo". Nesse sentido, esse processo envolveu o conteúdo cálculo de área de figuras geométricas poligonais, como quadrados, retângulos e triângulos, classificado como matemática elementar.

Esse pontapé inicial permitiu-nos utilizar outros conteúdos, como operação de somatório para a soma de Riemann e o conceito de limite para a definição da Integral, no entanto os conteúdos curriculares priorizados foram:

1. Integral Indefinida (antidiferiação);
2. Integral Definida;
3. propriedades da Integral Definida;
4. Teorema Fundamental do Cálculo;
5. aplicação da Integral Definida no cálculo de áreas;
6. história do cálculo;
7. recursos didáticos (computacionais e materiais concretos manipuláveis).

A extensão das práticas formativas nas escolas da educação básica priorizou os seguintes conteúdos:

1. o número "π";
2. diâmetro e raio de uma circunferência;
3. comprimento da circunferência;
4. área de triângulo;
5. área de quadrado;
6. área de círculo.

PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS

Desenvolvemos a atividade "Ressignificando o cálculo de áreas" na forma de oficina, criando pontes entre a matemática superior e a educação básica, no intuito de gerar um ambiente dinâmico e cooperativo. Nesse ambiente, os alunos foram instigados a investigar, criar conjecturas, testar hipóteses, criar conceitos por meio de noções intuitivas e formalizar definições, atuando como agentes ativos e reflexivos na construção do próprio conhecimento e de competências profissionais. Alinhando-nos a Fiorentini e Oliveira (2013, p. 925):

> Não é suficiente o futuro professor conhecer teoricamente, ou a partir da didática da matemática, como podem ser e funcionar as demonstrações em um ambiente exploratório-investigativo com a matemática. É preciso que ele possa experienciar o processo de exploração e investigação nas disciplinas matemáticas da licenciatura, tais como: cálculo diferencial e integral [...].

A atividade desenvolveu-se a partir de um material manipulável de baixo custo. A construção do recurso ocorreu fazendo uso de conhecimentos de funções e gráficos. Os materiais empregados foram cartolinas, tinta azul, papel transparência, régua, caneta e um texto adaptado de uma revisão bibliográfica, apresentando alguns elementos históricos da matemática sobre contribuições de povos antigos, em especial as atividades agrícolas do Antigo Egito nas margens do rio Nilo. Como acontece nas demais ciências, os valores da matemática, enquanto ciência historicamente construída pelas diversas civilizações, são criados e recriados pelos conflitos de uma longa evolução de pesquisa (PAIS, 2006, p. 18).

A produção dessas pesquisas é um dos mais fortes parâmetros para a organização que estudamos em sala de aula.

A atividade proposta era calcular a área de um terreno situado às margens do rio Nilo, que tinha o formato não poligonal. Ele seria representado pelo material construído. Vale salientar que as medidas utilizadas não representavam as medidas reais do rio Nilo, foram medidas criadas para efeito essencialmente didático. Os alunos foram orientados para uma leitura prévia sobre dois temas: o método da exaustão e a soma de Riemann, pois conhecer tais assuntos seria fundamental para ações e discussões nas atividades a serem realizadas.

Primeiro foi feito nas cartolinas (terreno fictício) um desenho que foi pintado de azul, representando o rio. As linhas que formam as margens do rio são gráficos de funções, traçados por um sistema cartesiano "imaginário". Depois, num *software*, plotamos um sistema de eixos coordenados e o imprimimos num papel transparente, que, quando sobreposto na cartolina, permitia-nos visualizar as margens do rio como o gráfico traçado num plano cartesiano. Na região do intervalo [-10; 0], o leito do rio é representado por uma curva e no intervalo de [0; 10] o leito do Nilo se faz por outra curva, ambas parábolas que têm em comum o ponto coordenado (0; 1). Dessa forma, ficou pronto o recurso (material manipulável), que pode ser observado na Figura 1 dos anexos.

Iniciamos a primeira etapa da atividade discutindo o texto "Panorama histórico: sistematização e formalização do cálculo de áreas"; na sequência, a turma foi dividida em grupos e convencionamos que cada 1 cm^2 na cartolina corresponderia a uma unidade de área do terreno fictício. Eles calculariam a área abaixo da curva do rio, procedendo da maneira que preferissem. Os alunos passaram a fazer repartições da região em figuras geométricas, das quais sabiam calcular a área, mobilizando conhecimentos da educação básica sobre cálculo de áreas de quadrados, retângulos e triângulos. Ao encostarem à borda do terreno (margem do rio), todos sentiram muitas dificuldades, houve muitas discussões de como realizar a tarefa. Um grupo optou por traçar triângulos e o outro preferiu traçar quadrados de 1 cm x 1 cm. Foram diminuindo a área de seus desenhos, tentando englobar a área que pretendiam calcular e perceberam que era um trabalho exaustivo. Eles concluíram que o melhor valor adquirido não poderia ser um valor exato, mas sim um valor aproximado.

Nesse momento, um objetivo da proposta foi atingido. Coletivamente, discutimos acerca das conclusões obtidas pelos grupos e comparamos com matemáticos pioneiros. As dificuldades encontradas na atividade foram as mesmas que célebres matemáticos tiveram, e as técnicas usadas também foram similares, dentre elas, os matemáticos gregos sabiam que

> [...] o método de Eudoxo, do século V a.E.C., consistia em inscrever polígonos regulares em uma figura curvilínea, como um círculo, e ir dobrando o número de lados até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada. (ROQUE, 2012, p. 203)

Essa constatação dos gregos é a base de um método conhecido como “método da exaustão.

Depois de todos terem registrado os valores para aquela área, foram entregues aos grupos papéis transparência plotados com o sistema cartesiano e houve uma discussão para determinar que tipo de curva estava ali representada. Após os estudantes se convencerem de que eram parábolas, e discutirmos sobre domínio, imagem e lei de formação, por interpolação polinomial, eles determinaram a função que expressava algebricamente a curva. Vale destacar que, nesse momento, a mobilização sobre o ensino de funções na educação básica teve destaque, observando a necessidade de uma linguagem matemática com rigor.

Antes de encerrar a aula, nesse dia, os discentes foram orientados para, como atividade extraclasse, usarem 10, 20 e 40 retângulos com base sobre o eixo dos x, cuja altura seria determinada pela função da curva do rio, e com isso recalcularem a área e compararem com a primeira resposta registrada.

No encontro seguinte, as discussões foram retomadas para calcular a área proposta na atividade usando retângulos, conforme orientação docente. Todos tinham feito a atividade proposta em casa usando lápis, papel, borracha e calculadora, o que serviu para que eles percebessem o quão trabalhosa foi a empreitada enfrentada pelos matemáticos do passado, por falta de tecnologia computacional. Para verificar a correção dos cálculos obtidos, planilhas eletrônicas foram utilizadas para os mesmos cálculos com 10, 20, 40, 200 e 1.000 retângulos. Ao mesmo tempo, isso proporcionou uma boa discussão sobre a importância do uso de tecnologia em sala de aula. Intuitivamente, todos já haviam percebido que à medida que aumentava o número de retângulos o valor da área variava infimamente.

Nesse patamar, havia a consciência de que para otimizar os cálculos seria necessário inserir o conceito de limites e, após discutirmos sobre a soma de Riemann, definirmos formalmente o conceito de Integral para calcular a área de regiões sob curvas delimitadas por intervalos.

Com o algoritmo da Integral definido, os alunos foram solicitados a calcularem a área da região sob a mesma curva do rio Nilo e compararem os resultados obtidos com os anteriores, em que os valores que os grupos encontraram se aproximaram do valor encontrado por meio da Integral. Os alunos ficaram entusiasmados com o resultado e dentre vários comentários destacam-se:

> *Achei uma atividade inovadora, pois estava acostumada a trabalhar cálculo de forma tradicional e mecânica! Foi uma atividade que permitiu a nós alunos construir nosso próprio conhecimento, e por isso foi tão importante! Trabalhamos o conteúdo usando aquilo que enquanto futuros professores defendemos que deve ser usado no processo ensino e aprendizagem porém quase nunca vivenciamos na prática!* (JMAN)

> *Por meio dessa atividade foi possível aliar teoria com a prática, perceber utilidade na aplicação dos conteúdos trabalhados e promover a interação entre colegas, professor e o conhecimento. Além disso, conseguimos entrar em contato com diferentes tendências em educação matemática que nos inspiraram a refletir sobre a prática pedagógica que devemos adotar futuramente.* (STS)

Essa proposta apresentou um posicionamento explícito de uma relação específica entre a história da matemática, tecnologias variadas e a investigação matemática. A preocupação em romper com a maneira convencional de ensinar a Integral, por meio de um método diferenciado, foi a motivação para a realização e a compreensão da atividade.

Na terceira semana, demos continuidade às atividades, explorando as propriedades da Integral aplicadas na resolução daquela atividade: vimos que foi necessário usar a regra da subdivisão e da soma, e então a área total foi dividida em duas regiões menores. Além dessas, ponderamos outras propriedades que foram usadas para provar o Teorema Fundamental do Cálculo, que nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Procedemos com a resolução de alguns exercícios do livro, a fim de apontar possíveis dúvidas da aplicação do algoritmo da Integral.

Demos continuidade à aula, focalizando nossa prática formativa por meio do debate sobre o texto "História e tecnologia na construção de um ambiente problemático para o ensino de matemática". Corroborando a conexão entre história e tecnologias, Roque e Giraldo (2014, p. 34) pontuam que

> O conhecimento histórico por parte do professor permite recontextualizar as ideias matemáticas no ambiente problemático de sua gênese, reconhecendo e situando os aspectos epistemológicos que emergem no processo de ensino-aprendizagem. O uso de tecnologias pode se articular, na prática de sala de aula, a essa forma de ver a matemática.

Na discussão, percebemos que história e tecnologias são também convergentes no processo de ensino e aprendizagens matemáticas na educação básica.

Para continuar rompendo com o método convencional e ressignificar o lugar do cálculo voltado para a formação docente, demos continuidade às atividades inovadoras, acreditando que se constituem em elementos propícios para aflorar ideias para ações docentes diferenciadas na educação básica. Apostamos em uma abordagem que

> [...] em qualquer formação matemática que aconteça nos cursos de Cálculo, o futuro professor não apenas aprende uma certa matemática, como é esperado pelo formador, mas aprende, também, um modo de estabelecer relação com o conhecimento; internaliza, igualmente, um modo de concebê-lo, de tratá-lo e de avaliá-lo no processo de ensino e aprendizagem. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 926)

Na semana seguinte, fomos todos para o jardim da universidade, com um *design* cheio de curvas, que favoreceu os trabalhos. Nesse dia, cada grupo escolheu uma região e, coletivamente, discutimos sugestões para o desenvolvimento de uma atividade em que teoria e prática pudessem continuar confluindo. Dessa forma, montamos o seguinte roteiro para a atividade proposta: fotografar o local; tomar as medidas usando uma fita métrica; encontrar uma representação algébrica para a curva; elaborar uma questão que envolvesse a aplicação da Integral para o cálculo da área; resolver a questão elaborada dando as devidas justificativas. Esse material deveria ser entregue ao professor juntamente com um relatório das atividades desenvolvidas.

Após discutirmos a metodologia e recursos empregados nas aulas de Cálculo, fizemos inferências acerca de possibilidades semelhantes na educação básica. Desse modo, a turma concluiu que a abordagem sobre o cálculo de área de círculo poderia ser problematizada de forma inovadora nas escolas. Finalizamos as atividades desse dia com uma proposta de trabalho extraclasse: os grupos deveriam planejar uma aula sobre área do círculo, para ser ministrada na educação básica, tendo a história e tecnologias como elementos problematizadores. Esse trabalho deveria ter um plano de aula, com clara descrição dos procedimentos didáticos e anexos de possíveis materiais empregados (textos, mídias, etc.), para socialização e sugestões coletivas.

No quinto encontro, planejamos dois momentos: o primeiro, para discutirmos métodos de integração; e o segundo, para que as equipes apresentassem suas propostas de aulas. Assim, houve ricas contribuições coletivas. As orientações perpassaram sobre o plano de aula, dicas para os procedimentos metodológicos e utilização de recursos didáticos. Uma equipe relatou: "*A ideia de substituir o material foi da nossa colega Aline. Ela fez a sugestão, pois o material elaborado em EVA era de difícil manuseio e os alunos podiam sentir dificuldades no momento da oficina*" (Grupo A).

A etapa seguinte das atividades sobre cálculo de áreas ocorreu nas escolas da educação básica: no Grupo Escolar Senador Ovídeo Teixeira e no Colégio Estadual Tereza Borges de Cerqueira, em turmas de 9º ano do ensino fundamental, com experiências que proporcionaram saberes de matemática do ensino. Sobre a prática nas escolas, uma das equipes relatou:

> *O conteúdo áreas muitas vezes é ensinado de forma superficial, principalmente quando se fala no círculo. A oficina deu oportunidade para se explorar mais o conteúdo através do contexto histórico, atividades lúdicas e demonstrações, assim os alunos puderam construir o conhecimento e verificar o porquê da fórmula ser dada por* $\pi r.^2$ (Grupo B)

AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DOS ESTUDANTES

A avaliação foi processual e contínua, observando e mediando os trabalhos. Durante todo o desenvolvimento das atividades, a inter-relação do docente formador com os licenciandos se alicerçou em várias perguntas sobre os procedimentos utilizados, provocando reflexões. Dessa forma, vimos equívocos nos caminhos para a aprendizagem, o que resultou em construção de conhecimentos. No entanto, foram utilizados outros métodos para avaliar a aprendizagem dos estudantes: a produção de um portfólio, que agregou todo o material produzido durante o desenvolvimento do projeto (revisão bibliográfica, plano de aula para oficina, prática pedagógica nas escolas, relatório escrito, trabalhos extraclasse, etc.) e uma avaliação escrita no final da unidade.

O material produzido constitui-se de relatórios sobre as atividades desenvolvidas, bem como dos registros das atividades de vários encontros e das práticas pedagógicas desenvolvidas nas escolas de educação básica.

Vale destacar que nas atividades produzidas de cada grupo, relacionadas à atividade "Ressignificando o cálculo de áreas", havia uma questão envolvendo um local do jardim do *campus* VI, por eles elaborada, que após revisada passou a fazer parte da avaliação escrita. Dessa forma, as questões elaboradas pelos discentes, bem como outras selecionadas pelo professor, constituíram a avaliação escrita, na qual, além de aplicarem o algoritmo da Integral, suas propriedades e o Teorema Fundamental do Cálculo para resolver problemas de aplicação prática, tiveram de dissertar sobre possíveis abordagens sobre a área na educação básica. A prova (anexa), que foi realizada sob consulta a material impresso, continha questões abertas que favoreceram a reflexão dos licenciandos a respeito do papel do professor.

Pude perceber os bons resultados. O clima pavoroso que se instaura no dia de prova de Cálculo pareceu não existir, além do índice de acertos que se elevou em comparação com outras turmas para quem lecionei. Por exemplo, esses alunos não incorreram no erro de expressar o cálculo da área por um valor negativo.

A forma de corrigir as provas foi diferente de correções anteriores, onde um "X" era empregado diante de uma resposta julgada como errada, por não usar procedimentos padrões. Com um novo olhar sobre a produção discente, ao corrigir as provas, o "X" deu lugar para uma "?", possibilitando um diálogo entre o professor-formador e o professor em formação inicial sobre raciocínios matemáticos, interpretações e procedimentos.

A análise da produção escrita de estudantes, além de se configurar como uma metodologia de ensino que pode ser útil ao professor em atuação docente, ganhou destaque em pesquisas científicas (CURY, 2008, 2013; FIORENTINI, 2006), como também se configurou como uma metodologia de pesquisas acadêmicas, para investigar o fenômeno de respostas classificadas como erradas no contexto do ensino e da formação do professor. Acredito que

> As pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciados em Matemática estarão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre as possíveis metodologias de ensino que vão implementar no início de suas práticas, podendo ajudar seus alunos logo que detectarem alguma dificuldade. (CURY, 2008, p. 93)

No entanto, reverter práticas historicamente arraigadas consiste em desafio, afinal, “todos nós somos sujeitos social e culturalmente constituídos e reproduzimos, em grande parte, os valores pelos quais fomos educados e formados. Assim, também o conceito de erro é histórico-cultural” (FIORENTINI, 2006, p. 2). Nesse sentido, estruturar o lugar desse debate na formação inicial do professor de matemática e promover práticas formativas são estratégias fundamentais, pois

> [...] os erros cometidos pelos alunos são bons exemplos das dificuldades que os futuros docentes vão enfrentar, mas também os erros cometidos por eles próprios são importantes, porque mostram quais aspectos dos conteúdos não foram bem compreendidos durante seus cursos de formação, inicial ou continuada. Assim, discutir erros, buscar estratégias para superá-los e planejar atividades em que esses erros possam se tornar observáveis são ações que devem fazer parte da formação do professor. (CURY, 2013, p. 550)

Dessa forma, criar reflexões respaldadas no exercício da empatia poderá auxiliar os futuros professores em relação às futuras práticas docentes, para não atuarem como replicadores das práticas tradicionais sobre avaliações e correções. Fiorentini (2006, p. 4) reforça que:

> Esse olhar sobre o lugar e o papel político e histórico-cultural do erro no contexto escolar nos remete a uma reflexão e análise mais profunda e cuidadosa da presença da cultura do erro nas práticas educativas. Questionar e compreender os meandros de uma prática escolar naturalizada que apresenta múltiplas formas e mecanismos de tratar o erro é um desafio tanto para pesquisadores quanto para os próprios professores.

Portanto, o erro não pode, jamais, ser visto como um mal a ser erradicado, mas sim como parte inerente do processo de aprendizagem, tomado como objeto de reflexão, análise e problematização didático-pedagógica por parte dos professores, tanto no contexto do ensino superior quanto na educação básica.

AUTOAVALIAÇÃO DO PROFESSOR FORMADOR

O entusiasmo dos alunos ficou evidente durante todo o tempo. As leituras dos relatórios das atividades criaram em mim uma euforia docente emocionante. Verificando os resultados obtidos pelo desenvolvimento das atividades, pude perceber que ter usado a história da matemática como fio condutor para fazer investigação usando variadas tecnologias despertou nos alunos maior interesse em participar ativamente nas aulas, pois permitiu que eles se sentissem personagens da história, desafiados a tentar e encontrar no "erro" uma forma de aprender.

Por esse motivo que a história da matemática em uma inter-relação com tecnologias em atividades investigativas é necessária em nossas aulas, numa perspectiva problematizada, de forma que o professor dispense tempo para preparação e desenvolvimento dos encontros. Verifica-se, então, a importância de desenvolver uma atividade bem planejada com objetivos bem definidos e desafiadores, que instiguem a curiosidade e ofereçam desafios na resolução de problemas significativos da matemática, ao mesmo tempo que possam proporcionar reflexões para a formação do professor da educação básica.

No enxerto, algumas ponderações pelos licenciandos:

> *Nas aulas de Cálculo II do professor Daniel, com uso de novas metodologias, aprendemos que a matemática acadêmica, especificamente o Cálculo, está intrinsecamente ligada ao nosso cotidiano. Estamos acostumados a pensar no Cálculo como algo muito complexo e distante de nosso entendimento. Para desmistificar esse pensamento o professor mostrou com a explanação dos conteúdos que o Cálculo está intimamente ligado com assuntos vistos na educação básica...* (Grupo A)

> *[...] de forma dinamizada, investigativa e com utilização de recursos tecnológicos o docente trouxe um método diferenciado e inovador, desenvolvendo conosco um trabalho intitulado "ressignificando o cálculo de áreas". Neste pudemos compreender o processo de integração, o qual considerávamos algo distante da nossa realidade.*
> *Esse trabalho, que contou com atividades lúdicas, oficinas, e o qual explorou a história da matemática, deu significado ao cálculo, despertando-nos a curiosidade e com certeza tornou a aprendizagem mais significativa e prazerosa, principalmente ao envolver situações que lidamos diariamente, sem memorização e sim compreensão e reflexão de todo conteúdo.*
> *Em resumo todo esse trabalho realizado durante o curso contribuiu muito não apenas para a compreensão dos conteúdos, mas também para a nossa formação como futuras professoras. Verificamos que a partir de abordagens diferenciadas e uso correto de recursos podemos desenvolver um trabalho que possibilita e cria oportunidades para a aprendizagem significativa dos alunos.* (Grupo B)

Ao planejar uma aula, respeito, companheirismo e colaboração são fatores importantes que devem ser trabalhados em sala. Inegavelmente, o trabalho em equipe contribui para que possamos alcançar fatores como esses, tão indispensáveis no ambiente de ensino da educação superior e básica. Nesse contexto, a atividade "Ressignificando o cálculo de áreas" estabeleceu maior socialização e interação dos licenciandos em matemática, pois eles passaram a respeitar-se, como fizeram ao estabelecer as ideias e manipular os materiais concretos e digitais no momento das investigações das atividades propostas.

Visto que a grande responsabilidade em fazer uma educação de excelência está também nas mãos dos professores, em qualquer nível de ensino, tanto na educação básica como na superior, esses precisam renovar-se constantemente, buscando soluções que os auxiliem na execução de seus trabalhos. Nesse sentido, as minhas experiências como professor de Cálculo na licenciatura e o desejo de uma formação adequada de professores de matemática possibilitaram-me compreender que:

> Para uma perspectiva de mudança nos processos de formação docente, o formador emerge como figura de importância fundamental. De acordo com Fiorentini (2004)[2], os formadores-pesquisadores deveriam constituir a base de um curso de licenciatura, podendo alimentar suas práticas a partir das pesquisas que realizam. Mas, além disso, essas pesquisas devem voltar-se para a própria prática, para a formação que devem realizar em consonância com a prática dos futuros docentes na escola básica, que vão ensinar matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio. Fiorentini (2004) trata por formador-pesquisador aquele que coloca (e valoriza) a docência como seu foco principal de prática e estudo, sendo a pesquisa sobre a própria prática – e também sobre a de outros – o suporte fundamental para a docência como formador de professores de matemática. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 934-935)

Entender-me como professor-formador foi fundamental para direcionar as ações docentes. Pude notar que aquelas aulas exerceram um papel formativo e conscientizador para aqueles futuros professores. Eles notaram que as aulas organizadas motivam não somente os alunos, como também professores, contagiando a todos em um ambiente prazeroso e convidativo com envolvimento e participação.

Outro aspecto interessante é a avaliação discente sobre a prática desenvolvida. Nesse aspecto, trabalhos foram produzidos no intuito de serem compartilhados em eventos da área de ensino de matemática, a exemplo de um relato de experiência com o título "Uma abordagem diferenciada da Integral: ressignificação do cálculo de áreas para a formação do professor", publicado[3] no XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática, de autoria de alunos(as) que expressam a visão discente sobre as atividades desenvolvidas.

Assim, o uso da história da matemática em conexão com tecnologias em atividades investigativas passou a integrar cada vez mais a minha prática docente, na qual as realizações de tais atividades favorecem um ambiente dinâmico, reflexivo e a construção do conhecimento

2 FIORENTINI, D. A investigação em educação matemática sob a perspectiva dos formadores de professores. *In:* SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2004, Covilhã, Portugal. *Actas* [...] Lisboa: APM, 2004. p. 13-35.

3 Disponível em: https://casilhero.com.br/ebem/mini/uploads/anexo_final/cb8db5269ae0b09794831c0fdc4d09ab.pdf.

de forma significativa. Continuar utilizando tais elementos problematizadores em investigação matemática será uma forma de qualificar a orientação dos professores em formação numa perspectiva de assumirem o compromisso de construírem e aplicarem propostas de uma matemática problematizada nas instituições de educação básica.

Com este trabalho, constata-se que o uso da história da matemática e das tecnologias em atividades investigativas deve integrar as aulas de matemática, desde que sejam criteriosamente planejadas, pois assim favorecem a aprendizagem efetiva. Podemos inferir que o presente trabalho pode interessar a pesquisadores em educação e ensino, professores e estudantes da licenciatura cientes da importância de se estar sempre revendo a prática pedagógica, se essa vem atingindo os objetivos de professores e alunos e da própria instituição. Isso porque tanto alunos como professores estão em constante processo de educação: ensinando e sendo ensinados.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em educação matemática:* sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

CURY, H. N. *Análise de erros:* o que aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, H. N. Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 547-562, 2013.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, v. 61, n. 3, p. 293-319, 2006.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação PUC-Campinas*, Campinas, SP, n. 18, p. 107-115, jun. 2005.

FIORENTINI, D. Erros e acertos no ensino-aprendizagem da matemática: problematizando uma tradição cultural. *In:* JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: NOVOS DESAFIOS! NOVAS PRÁTICAS? (in CD-ROM), 1., 2006, Passo Fundo, RS. *Anais* [...]. Passo Fundo, RS: Universidade de Passo Fundo, 2006. v. 1. p. 1-14.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. *Ciência e Cultura*, Campinas, SP, v. 70, n. 1, p. 37-42, jan./mar. 2018.

HOFFMANN, L. D. *Cálculo:* um curso moderno e suas aplicações. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, v. 108, n. 6, p. 1017-1054, jun. 2006.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 27, n. 47, p. 981-1005, 2013.

PAIS, L. C. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 152 p.

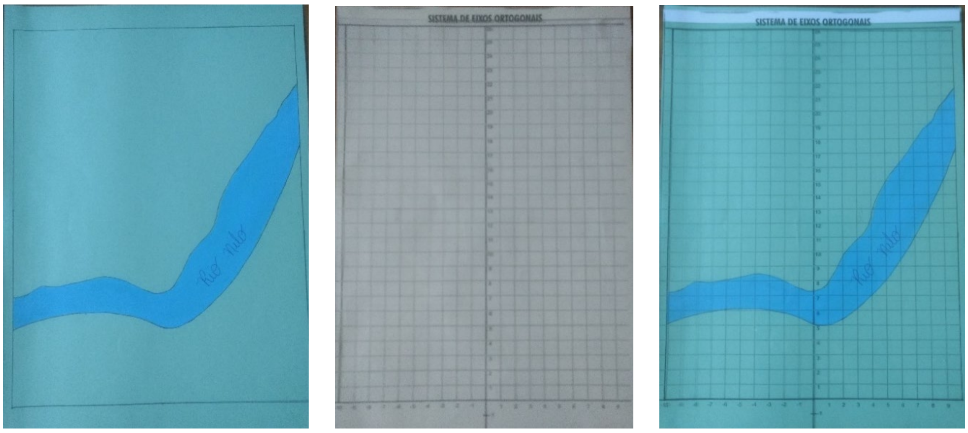
ROQUE, T. M. *História da matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. M.; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROQUE, T. M.; GIRALDO, V. História e tecnologia na construção de um ambiente problemático para o ensino de matemática. *In:* ROQUE, T. M.; GIRALDO, V. (org.). *O saber do professor de matemática:* ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. p. 8-27.

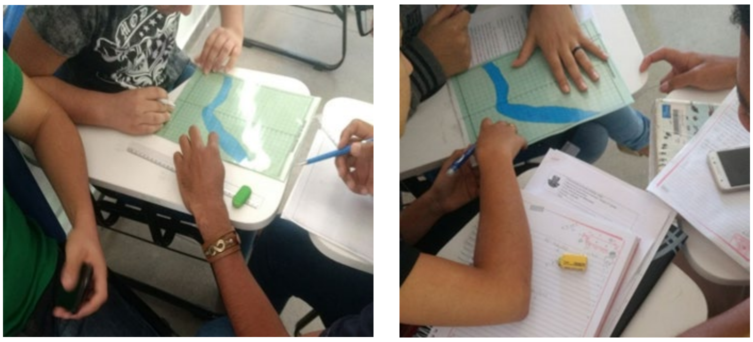
ANEXOS

FIGURA 1 – MATERIAL DIDÁTICO PARA ATIVIDADE “RESSIGNIFICANDO O CÁLCULO DE ÁREAS”



Fonte: Elaborado pelo autor.

FIGURA 2 – DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE “RESSIGNIFICANDO O CÁLCULO DE ÁREAS”



Fonte: Elaborado pelo autor.

TABELAS PRODUZIDAS EM PLANILHAS ELETRÔNICAS NAS OPERAÇÕES DA ATIVIDADE “RESSIGNIFICANDO O CÁLCULO DE ÁREAS”

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1					Aproximação da área A desejada por soma de retângulos									
2	10 retângulos de base 2 u.c				20 retângulos de base 1 u.c.				40 retângulos de base 0,5 u.c					
3	x	f(x)	A≈2*∑f(x)		x	f(x)	A≈1*∑f(x)		x	f(x)	x	f(x)	A≈0,5*∑f(x)	
4	-9	1,36	A≈2*34,025		-9,5	1,19	A≈1*68,2625		-9,75	1,0975	0,25	1,007813	A≈0,5*136,6313	
5	-7	1,84	A≈68,05		-8,5	1,51	A≈68,2625 u.a.		-9,25	1,2775	0,75	1,070313	A≈68,31565 u.a.	
6	-5	2			-7,5	1,75			-8,75	1,4375	1,25	1,195313		
7	-3	1,84			-6,5	1,91			-8,25	1,5775	1,75	1,382813		
8	-1	1,36			-5,5	1,99			-7,75	1,6975	2,25	1,632813		
9	1	1,125			-4,5	1,99			-7,25	1,7975	2,75	1,945313		
10	3	2,125			-3,5	1,91			-6,75	1,8775	3,25	2,320313		
11	5	4,125			-2,5	1,75			-6,25	1,9375	3,75	2,757813		
12	7	7,125			-1,5	1,51			-5,75	1,9775	4,25	3,257813		
13	9	11,125			-0,5	1,19			-5,25	1,9975	4,75	3,820313		
14	∑=	34,025			0,5	1,03125			-4,75	1,9975	5,25	4,445313		
15					1,5	1,28125			-4,25	1,9775	5,75	5,132813		
16					2,5	1,78125			-3,75	1,9375	6,25	5,882813		
17					3,5	2,53125			-3,25	1,8775	6,75	6,695313		
18					4,5	3,53125			-2,75	1,7975	7,25	7,570313		
19					5,5	4,78125			-2,25	1,6975	7,75	8,507813		
20					6,5	6,28125			-1,75	1,5775	8,25	9,507813		
21					7,5	8,03125			-1,25	1,4375	8,75	10,57031		
22					8,5	10,03125			-0,75	1,2775	9,25	11,69531		
23					9,5	12,28125			-0,25	1,0975	9,75	12,88281		
24					∑=	68,2625					∑=	136,6313		
25														

Plan1 Plan2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1			Aproximação da área A desejada por 200 retângulos de base medindo 0,1 u.c.																			
2	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	A≈ 0,1 x ∑f(x)	
3	-9,95	1,0199	-7,95	1,6519	-5,95	1,9639	-3,95	1,9559	-1,95	1,6279	0,05	1,0003	2,05	1,5253	4,05	3,0503	6,05	5,5753	8,05	9,10031	A≈ 0,1 x 683,326	
4	-9,85	1,0591	-7,85	1,6751	-5,85	1,9711	-3,85	1,9471	-1,85	1,6031	0,15	1,0028	2,15	1,5778	4,15	3,1528	6,15	5,7278	8,15	9,30281	A≈ 68,3326 u.a	
5	-9,75	1,0975	-7,75	1,6975	-5,75	1,9775	-3,75	1,9375	-1,75	1,5775	0,25	1,0078	2,25	1,6328	4,25	3,2578	6,25	5,8828	8,25	9,50781		
6	-9,65	1,1351	-7,65	1,7191	-5,65	1,9831	-3,65	1,9271	-1,65	1,5511	0,35	1,0153	2,35	1,6903	4,35	3,3653	6,35	6,0403	8,35	9,71531		
7	-9,55	1,1719	-7,55	1,7399	-5,55	1,9879	-3,55	1,9159	-1,55	1,5239	0,45	1,0253	2,45	1,7503	4,45	3,4753	6,45	6,2003	8,45	9,92531		
8	-9,45	1,2079	-7,45	1,7599	-5,45	1,9919	-3,45	1,9039	-1,45	1,4959	0,55	1,0378	2,55	1,8128	4,55	3,5878	6,55	6,3628	8,55	10,1378		
9	-9,35	1,2431	-7,35	1,7791	-5,35	1,9951	-3,35	1,8911	-1,35	1,4671	0,65	1,0528	2,65	1,8778	4,65	3,7028	6,65	6,5278	8,65	10,3528		
10	-9,25	1,2775	-7,25	1,7975	-5,25	1,9975	-3,25	1,8775	-1,25	1,4375	0,75	1,0703	2,75	1,9453	4,75	3,8203	6,75	6,6953	8,75	10,5703		
11	-9,15	1,3111	-7,15	1,8151	-5,15	1,9991	-3,15	1,8631	-1,15	1,4071	0,85	1,0903	2,85	2,0153	4,85	3,9403	6,85	6,8653	8,85	10,7903		
12	-9,05	1,3439	-7,05	1,8319	-5,05	1,9999	-3,05	1,8479	-1,05	1,3759	0,95	1,1128	2,95	2,0878	4,95	4,0628	6,95	7,0378	8,95	11,0128		
13	-8,95	1,3759	-6,95	1,8479	-4,95	1,9999	-2,95	1,8319	-0,95	1,3439	1,05	1,1378	3,05	2,1628	5,05	4,1878	7,05	7,2128	9,05	11,2378		
14	-8,85	1,4071	-6,85	1,8631	-4,85	1,9991	-2,85	1,8151	-0,85	1,3111	1,15	1,1653	3,15	2,2403	5,15	4,3153	7,15	7,3903	9,15	11,4653		
15	-8,75	1,4375	-6,75	1,8775	-4,75	1,9975	-2,75	1,7975	-0,75	1,2775	1,25	1,1953	3,25	2,3203	5,25	4,4453	7,25	7,5703	9,25	11,6953		
16	-8,65	1,4671	-6,65	1,8911	-4,65	1,9951	-2,65	1,7791	-0,65	1,2431	1,35	1,2278	3,35	2,4028	5,35	4,5778	7,35	7,7528	9,35	11,9278		
17	-8,55	1,4959	-6,55	1,9039	-4,55	1,9919	-2,55	1,7599	-0,55	1,2079	1,45	1,2628	3,45	2,4878	5,45	4,7128	7,45	7,9378	9,45	12,1628		
18	-8,45	1,5239	-6,45	1,9159	-4,45	1,9879	-2,45	1,7399	-0,45	1,1719	1,55	1,3003	3,55	2,5753	5,55	4,8503	7,55	8,1253	9,55	12,4003		
19	-8,35	1,5511	-6,35	1,9271	-4,35	1,9831	-2,35	1,7191	-0,35	1,1351	1,65	1,3403	3,65	2,6653	5,65	4,9903	7,65	8,3153	9,65	12,6403		
20	-8,25	1,5775	-6,25	1,9375	-4,25	1,9775	-2,25	1,6975	-0,25	1,0975	1,75	1,3828	3,75	2,7578	5,75	5,1328	7,75	8,5078	9,75	12,8828		
21	-8,15	1,6031	-6,15	1,9471	-4,15	1,9711	-2,15	1,6751	-0,15	1,0591	1,85	1,4278	3,85	2,8528	5,85	5,2778	7,85	8,7028	9,85	13,1278		
22	-8,05	1,6279	-6,05	1,9559	-4,05	1,9639	-2,05	1,6519	-0,05	1,0199	1,95	1,4753	3,95	2,9503	5,95	5,4253	7,95	8,9003	9,95	13,3753		
23																			∑=	683,326		

Plan1 Plan2

Aplicando a integral definida para calcular a área A desejada temos:

$$A = \int_{-10}^{0} \left(-\frac{x^2}{25} - \frac{2}{5}x + 1 \right) dx + \int_{0}^{10} \left(\frac{x^2}{8} + 1 \right) dx$$

$$A = \frac{50}{3} + \frac{155}{3} \approx 68{,}333\ u.a.$$

ALGUMAS IMAGENS DO JARDIM DA UNIVERSIDADE EXPLORADO PELAS EQUIPES

UM DOS TRABALHOS EXTRACLASSE DESENVOLVIDO POR UMA DAS EQUIPES

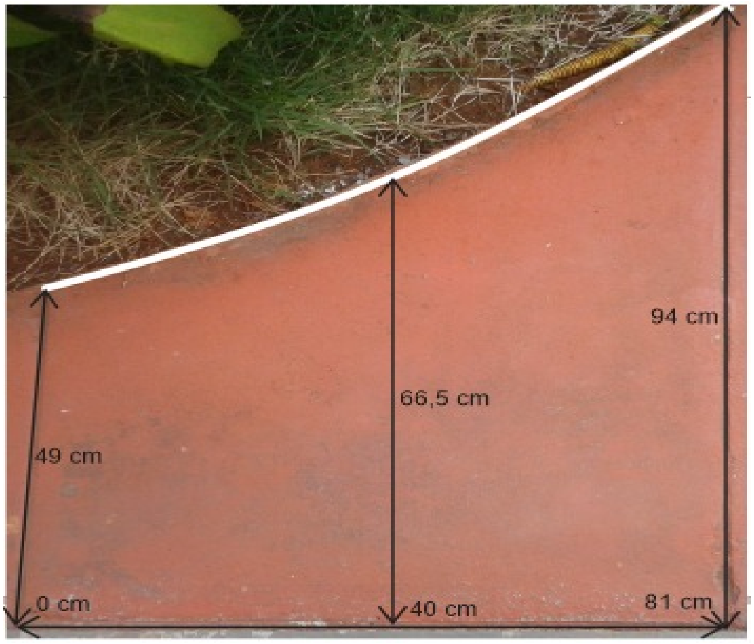
UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
DISCPLINA: Cálculo II
DOCENTE: Daniel de Jesus Silva
DISCENTES: Cleidiana Marinho Silva, Nayane Almeida Pereira e Wânderson Alves de Souza.

O cálculo de área, com o uso da integral, na resolução de uma situação problema.

- **Questão**:

Ana, apaixonada por seu jardim, resolveu deixá-lo mais bonito. A intenção dela era decorar uma parte com azulejo colorido. Ana escolheu um local próximo a uma grama com plantas verdes. Para saber o tamanho do azulejo, e assim evitar gastos, ela precisava encontrar o valor da área total do local a ser revestido. Para isso, Ana mediu os lados do lugar:

Os valores encontrados por ela foram registrados na imagem a seguir:



Agora, com as medidas e observando os dados da figura acima, ajude Ana a encontrar o valor da área total, seguindo os passos abaixo:

1º passo: Encontrar a equação da curva delimitada pela cor branca.

Dica: Observe a curva e identifique com qual gráfico de função ela se assemelha. Utilize os valores encontrados como pontos cartesianos (exemplo: x =0 e y=49).

2º passo: Prove que a equação é válida para os seguintes valores:

- x = 20 e y = 56,6
- x = 60 e y = 78,7

3º passo: Para encontrar a área total do local a ser revestido com azulejo, calcule a integral definida utilizando a equação do primeiro passo.

Dica: lembre-se, o limite inferior da integração irá corresponder ao menor valor de x, assim como o limite superior é igual ao maior valor de x encontrado.

PORTFÓLIO: UMA DAS AVALIAÇÕES DESENVOLVIDA JUNTO À TURMA

	UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS – CAMPUS VI COLEGIADO DE MATEMÁTICA COMPONENTE CURRICULAR: CÁLCULO II DOCENTE: DANIEL DE JESUS SILVA.

Portfólio multimídia

Cada aluno deverá construir individualmente um portfólio multimídia relatando reflexões e experiências a partir da participação nesta disciplina, com respeito: ao conteúdo matemático, aos saberes de matemática do ensino, a seu próprio processo de aprendizagem, e a suas próprias perspectivas de futuras práticas docentes, como por exemplo ideias entendidas de novas perspectivas, dificuldades observadas, abordagens ou recursos didáticos idealizados ou aplicados, impressões ou vivências pessoais, e assim por diante.

Esses relatos poderão se referir a reflexões e experiências tanto mais internas à disciplina, isto é, relacionadas mais diretamente às aulas e atividades, como mais externas, isto é, inspiradas pelas discussões nas aulas e atividades da disciplina, mas relacionadas a outros contextos profissionais, acadêmicos ou pessoais. Os relatos no portfólio multimídia deverão incluir necessariamente, em algum momento e de alguma forma, os aspectos a seguir (mas não se reduzir exclusivamente a estes):

1) Suas experiências como alunx da educação básica em aulas de matemática:
   - ✓ Uma que você identifique como uma boa prática do professor;
   - ✓ Uma que você identifique como uma prática inadequada do professor;
   - ✓ Uma que na época você tenha considerado uma boa prática do professor, mas que hoje você avalie de outra forma;
2) Suas experiências como alunx de graduação no curso de licenciatura em matemática:
   - ✓ Uma que você identifique como uma boa prática do professor;
   - ✓ Uma que você identifique como uma prática inadequada do professor;
   - ✓ Uma que na época você tenha considerado uma boa prática do professor, mas que hoje você avalie de outra forma;
3) Uma discussão sobre visões e percepções de alunxs da educação básica sobre a disciplina de matemática, a partir de sua experiência junta a educação básica.

4) Uma discussão sobre visões e percepções de alunxs de licenciatura sobre o próprio processo de formação profissional docente, a partir de sua experiência como estudante da licenciatura em matemática;
5) Uma discussão crítica sobre objetivos, estruturas e propostas das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de licenciatura em matemática, fundamentada na literatura de pesquisa em formação de professores, e ilustrada por reflexões e experiências a partir da participação nesta disciplina.

Os participantes serão incentivados a escreverem semanalmente a partir de cada encontro. A organização do portfólio multimídia é livre, podendo ser, por exemplo cronológica, temática, ou de qualquer forma que o autor considerar conveniente. O portfólio multimídia poderá – e deverá – incluir não apenas textos próprios como diversas formas de mídias, tanto produzidas pelo autor como de outros autores (com as devidas referências), tais como imagens, gráficos, desenhos, áudio e vídeos.

AVALIAÇÃO ESCRITA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS – CAMPUS VI
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
COMPONENTE CURRICULAR: CÁLCULO II
DOCENTE: DANIEL DE JESUS SILVA.
DISCENTE:___________________________________
AVALIAÇÃO I DATA:______/_______/_______ NOTA:________

1) (a) Determine a área limitada entre as curvas $y = x^3$ e $y = 3x$.

(b) Determine $\int_{-1}^{3} f(x)dx$, em que $f(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ x < 2 \\ 4x - x^2 & se\ x \geq 2 \end{cases}$.

2) Em cada um dos itens a seguir, elabore um enunciado para uma questão cuja resposta seja a expressão dada. Discuta as diferenças entre essas questões.

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 0$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x| dx = 4$

3) Considere o teorema do valor médio para integrais, cujo enunciado é o seguinte:

Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então, existe um número* $c \in\,]a, b[$ *tal que:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

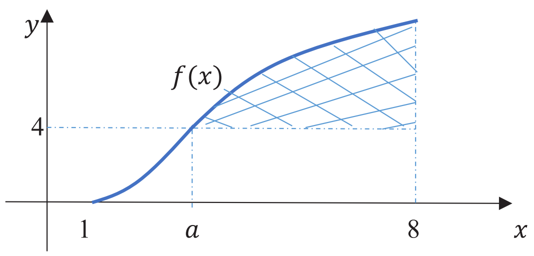
Neste caso, o número $f(c)$ *é chamado valor médio de* f *em* $[a, b]$.

O objetivo desta questão não é dar uma demonstração para o teorema, e sim explorar significados de seu enunciado.

(a) Faça um desenho interpretando geometricamente o teorema. Por que você considera que $f(c)$ é chamado valor médio de f *em* $[a, b]$?

(b) Considere a curva $y = f(x)$, cujo gráfico é dado abaixo, em que: $f(a) = 4$ é o valor médio de f *em* $[1, 8]$; o valor numérico da área hachurada é 12 unidades; e $\int_1^a f(x)dx = 3$. Determine:

(i) $\int_a^8 f(x)dx$ (ii) o valor de a.



4) Em uma prova de Cálculo, o professor propôs a seguinte questão:

Calcule $\int sec^2x\, tg\, x\, dx$.

Observe as resoluções de três alunxs.

Alunx A: $u = tgx,\ du = sec^2x\, dx$. Temos:

$$\int sec^2x\, tg\, x\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{tg^2x}{2} + c$$

Alunx B: $u = \sec x,\ du = \sec x\, tg\, x\ dx$. Temos:

$$\int sec^2x\, tg\, x\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{sec^2x}{2} + c$$

Alunx C: $u = tgx,\ du = sec^2x\, dx$ $dv = sec^2x\, dx,\ v = tgx$, Temos:

$$\int sec^2x\, tg\, x\, dx = tg^2x - \int sec^2x\, tg\, x\, dx$$

$$2\int sec^2x\, tg\, x\, dx = tg^2x + c$$

$$\int sec^2x\, tg\, x\, dx = \frac{tg^2x + c}{2}$$

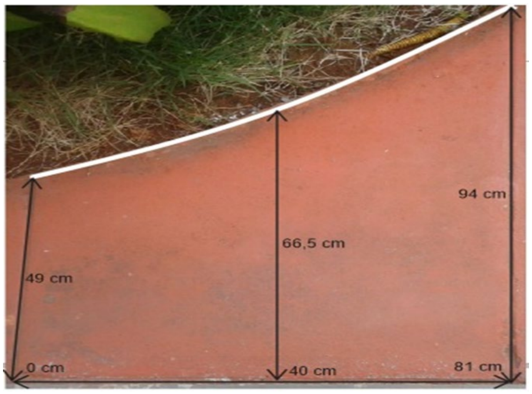
(a) Compare as respostas finais dos três alunxs e descreva os métodos usados por cada um delxs.

(b) Como você avaliaria as soluções e que retorno você daria para cada um dxs três alunxs?

(c) Quais conhecimentos da Educação Básica são mobilizados para resolver essa questão?

5) Sabemos que existem relações entre regras de derivação e os chamados métodos de integração, isto é, métodos para determinar famílias de primitivas de uma função dada. Descreva os principais métodos de integração e como estes estão relacionados com regras de derivação.

6) (**Questão de uma das equipes**) Ana, apaixonada por seu jardim, resolveu deixa-lo mais bonito. A intenção dela era decorar uma parte com ladrilhos coloridos. Ana escolheu um local próximo a uma grama com plantas verdes. Para saber a quantidade de ladrilhos, ela precisava encontrar a valor da área total a ser revestido. Para isso, Ana tomou algumas medidas do local. As medidas encontradas por ela, que estão descritas na imagem do local, abaixo foram:

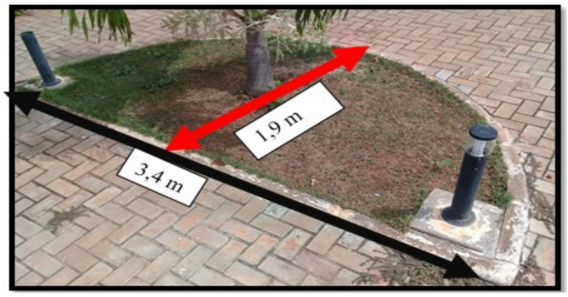


Agora, com as medidas e observando o formato da figura, ajude Ana a encontrar o valor da área compreendida entre a seta que mede 49 cm e a seta que mede 94 cm, seguindo os passos abaixo:

1º passo: Encontrar a equação analítica da curva que separa a parte da grama da parte estucada.

2ª passo: Para encontrar a área total do revestimento, calcule a integral definida utilizando a equação do primeiro passo.

7) (**Questão de uma das equipes**) Devido ao grande aumento de alunos na universidade, o diretor resolveu ampliar o espaço que dá acesso a cantina, então contratou um pedreiro para realizar a seguinte reforma: retirar toda a grama do local (conforme indicado na figura abaixo) e completar essa área com bloquetes. Sabendo-se que a direção deseja evitar gastos desnecessários e desperdício de materiais, baseando-se nas medidas indicadas na imagem abaixo, ache um modelo matemático (função) que representa a curva arqueada na figura e em seguida calcule a área total que o pedreiro deverá preencher com os bloquetes. (3,4 m é a medida entre as extremidades da base da figura e 1,9 m é a medida máxima de uma reta que passa no ponto médio da base formando um ângulo reto)



8) Descreva sucintamente uma abordagem que você usaria para trabalhar o conceito de área na educação básica.

IMAGENS DE UMA DAS EQUIPES DESENVOLVENDO A OFICINA SOBRE ÁREA DE CÍRCULO COM ALUNOS DO COLÉDIO ESTADUAL TEREZA BORGES DE CERQUEIRA

IMAGENS DE UMA DAS EQUIPES DESENVOLVENDO A OFICINA SOBRE ÁREA DE CÍRCULO NO GRUPO ESCOLAR OVÍDEO TEIXEIRA