

AVALIAÇÃO DOS DESENHOS DE PLANIFICAÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS NO ENSINO BÁSICO

ODALÉA APARECIDA VIANA

RESUMO

O trabalho refere-se a questões de geometria espacial constantes de avaliações oficiais feitas em larga escala e analisa desenhos de planificação de figuras geométricas tridimensionais (paralelepípedo, pirâmide, prismas, cilindros e cones). Foram sujeitos 842 alunos do 9º ano do ensino fundamental e da 3ª série do ensino médio. Com abordagem piagetiana acerca da construção das noções projetivas relativas à construção do espaço representativo, foram formadas categorias de análise referentes a níveis de desenvolvimento dessas noções. Os níveis variaram de um (mais verificado na planificação do cone), que revelou o estabelecimento de noções topológicas e a não identificação de propriedades das figuras, a cinco (mais verificado na planificação do paralelepípedo), cujos desenhos revelaram a identificação das principais propriedades e o estabelecimento de relações projetivas e euclidianas. O trabalho discute a planificação como forma de contribuir para a avaliação das propriedades das figuras geométricas espaciais.

PALAVRAS-CHAVE AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM • ENSINO DE GEOMETRIA • ENSINO MÉDIO • EDUCAÇÃO BÁSICA.

RESUMEN

El trabajo se refiere a temas de geometría espacial que constan en evaluaciones oficiales efectuadas a gran escala y analiza diseños de planificación de figuras geométricas tridimensionales (paralelepípedo, pirámide, prismas, cilindros y conos). Los sujetos fueron 842 alumnos del 9º año de la educación fundamental y del 3º año de la educación media. Con un abordaje piagetiano acerca de la elaboración de las nociones proyectivas relativas a la construcción del espacio representativo, se han formado categorías de análisis relativas a niveles de desarrollo de dichas nociones. Los niveles variaron de uno (más verificado en la planificación del cono), que reveló el establecimiento de nociones topológicas y la no identificación de propiedades de las figuras, a cinco (más verificado en la planificación del paralelepípedo), cuyos diseños revelaron la identificación de las principales propiedades y el establecimiento de relaciones proyectivas y euclidianas. El trabajo discute la planificación como forma de contribuir para la evaluación de las propiedades de las figuras geométricas espaciales.

PALABRAS CLAVE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE • ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA • EDUCACIÓN MEDIA • EDUCACIÓN BÁSICA.

ABSTRACT

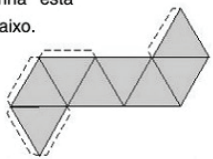

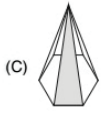


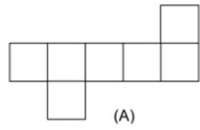
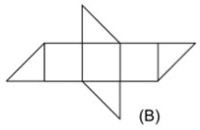
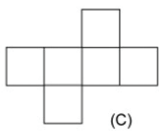
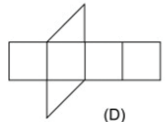
The study refers to spatial geometry questions listed in large scale official assessments and analyzes the construction of three-dimensional geometric figures (parallelograms, pyramids, prisms, cylinders and cones). 842 students from the ninth grade and twelfth grades were part of the study. Categories of analysis regarding the developmental levels of the construction of projective notions concerning representative space were formed based on the Piagetian approach. The levels ranged from one (better demonstrated in the construction of the cone), which showed the acquisition of topological notions and the non-identification of the properties of figures, to five (better demonstrated in the construction of the parallelogram), which drawings showed the identification of the main properties and the acquisition of projective and Euclidean relations. The study discusses construction as a way of contributing to the assessment of the properties of geometric spatial figures.

KEYWORDS LEARNING ASSESSMENT • TEACHING OF GEOMETRY • SECONDARY SCHOOL • BASIC EDUCATION.

INTRODUÇÃO

Nas provas de Matemática constantes das avaliações educacionais feitas em larga escala por órgãos governamentais, podem ser encontradas várias questões relativas ao conhecimento em geometria espacial. Em geral, solicita-se que o aluno identifique – entre várias alternativas – a planificação correta de uma figura geométrica tridimensional; em outros casos, pede-se identificar a figura a partir de uma planificação. O Quadro 1 mostra dois exemplos de questões envolvendo a planificação de figuras espaciais.

QUADRO 1 - Exemplos de questão de geometria em provas oficiais

<p>EXEMPLO 1:</p> <p>Melissa fez uma caixinha para guardar seus brincos.</p> <p>A planificação da caixinha está representada na figura abaixo.</p>  <p>Como ficou a caixinha de Melissa depois de colada?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>(A) </p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>(C) </p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>(B) </p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>(D) </p> </div> </div>	<p>EXEMPLO 2:</p> <p>Observe as figuras abaixo.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>(A)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(B)</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>(C)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(D)</p> </div> </div> <p>Entre elas, a planificação de uma caixa em forma de cubo é a figura</p> <p>(A) A. (B) B. <input checked="" type="checkbox"/> (C) C. (D) D.</p>
---	---

Fonte: Saesp 7º ano EF (SÃO PAULO, 2009).

Fonte: Prova Brasil, 9º ano EF (BRASIL, 2008).

Encontra-se a justificativa para esse tipo de questão observando as matrizes de referência das avaliações em larga escala: os descritores indicam a habilidade para identificar figuras geométricas tridimensionais e suas propriedades a partir das respectivas planificações.

Questões envolvendo planificação avaliam conhecimentos relativos ao bloco espaço e forma, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997). O documento apresenta, para as primeiras séries, um trabalho que pressupõe a distinção entre espaço perceptivo e representativo, sugerindo experiências com objetos do espaço, como levar o aluno a observar as formas geométricas presentes nos elementos naturais; comparar objetos do espaço físico; reconhecer objetos esféricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos; perceber semelhanças e diferenças entre quadrados e cubos, paralelepípedos e retângulos; construir e representar formas geométricas, etc. (BRASIL, 1997).

Ainda nos anos iniciais, sugere-se a exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais. Ao final do ensino fundamental (BRASIL, 1998), espera-se que o aluno

estabeleça relações entre figuras espaciais e suas representações planas; observe figuras sob diferentes pontos de vista; e descreva algumas características com nomenclatura própria.

Nessa linha de trabalho (BRASIL, 2000, 2002), ao final do ensino médio é esperado que o aluno domine propriedades relativas aos poliedros e aos corpos redondos; saiba interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos e também utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais.

Apesar dessas indicações para um trabalho com a geometria espacial desde os anos iniciais, pesquisas mostram que alunos do ensino fundamental, médio e superior têm dificuldades para resolver questões relativas à formação de conceitos e ao desenvolvimento de habilidades geométricas (KOTZÉ, 2007; PROENÇA, 2008; SANTOS, 2003; VASCONCELOS, 2004).

Muitos alunos do ensino médio confundem poliedros com polígonos, conforme pode ser visto em Proença e Piro-la (2011), e outros demonstram estar em um nível de compreensão e de desenvolvimento de habilidades inferior ao requerido pela série (VIANA, 2010).

A compreensão em geometria pode ser interpretada por meio da teoria proposta por Van Hiele (1986). Largamente utilizada na década de 1990 e recentemente por autores como De Villiers (2010), Feza e Webb (2005) e Frade (2012), tal teoria indica cinco níveis do chamado pensamento geométrico; este se desenvolve a partir do reconhecimento das figuras por sua aparência global, progride para a identificação de propriedades, avança para a dedução informal seguida da capacidade de sequenciamento lógico para demonstrações e, finalmente, atinge o rigor matemático. Van Hiele (1986) sugere que os alunos prosseguem nessa sequência hierárquica enquanto aprendem geometria e pode-se verificar a importância atribuída à exploração das propriedades das figuras¹ rumo à formação conceitual.

A atividade cognitiva de estudantes em tarefas de geometria tem sido investigada com base na análise dos registros produzidos por eles. A teoria dos registros de representação

¹ Fischbein (1993) afirma que as figuras geométricas possuem uma natureza dual, ou seja, têm componentes figurativa e conceitual.

O "conceito figurativo" é uma realidade mental e é o resultado do raciocínio matemático no domínio especificamente da geometria.

semiótica proposta por Raymond Duval pode ser vista em vários trabalhos nacionais, como em Almouloud (2011), Flores e Moretti (2006), Kaleff (2007), Moretti (2011), Viana (2014), entre outros.

Na literatura internacional, podem ser encontrados trabalhos que evidenciam a formação de imagens mentais, como em Elia e Evangelou (2013); Kalogirou, Elia e Gagatsis (2013); Pittalis e Christou (2010) e Tatsis e Moutsios-Rentzos (2013). A maioria desses trabalhos cita os estudos de Battista e Clements (1991) e Clements e Battista (1992). Acerca do raciocínio espacial, utilizam a teoria proposta por Duval (2005, 2009, 2011, 2012).

Solicitar dos alunos a nomeação e a descrição de propriedades e também o desenho da planificação de figuras pode ser uma maneira de avaliar o conhecimento relativo à geometria espacial (VIANA, 2009, 2012). Esses trabalhos realizados com estudantes do ensino básico encontraram desenhos que pareciam demonstrar que o sujeito desconhecia as principais propriedades de poliedros simples. Interpretados como registros de representação semiótica, os desenhos produzidos indicavam que, mesmo diante da figura do paralelepípedo em perspectiva, os sujeitos pareciam não estabelecer relações entre as faces: alguns não representavam as seis faces retangulares no desenho da planificação; outros desenhavam os retângulos em dimensões e disposição não adequadas (VIANA, 2014).

Considera-se que, além de serem reflexos de um processo de ensino e aprendizagem em que a exploração das propriedades geométricas não foi priorizada, as dificuldades citadas podem estar relacionadas ao desenvolvimento das noções relativas ao espaço representativo construído pela criança, conforme a perspectiva piagetiana. De acordo com Piaget e Inhelder (1993), a operação de planificar figuras está ligada à coordenação entre diferentes pontos de vista da figura tridimensional, o que corresponde à construção das noções projetivas pelo indivíduo. Os autores classificaram a atividade de planificação em dois tipos: rebatimento de planos (para poliedros) e desenvolvimento de superfícies (para o cilindro e o cone) e analisaram os níveis de desenvolvimento

das citadas noções. Como exemplos, podem ser citados os casos em que o desenho da planificação é igual ao desenho da figura em perspectiva e aqueles em que as faces são desenhadas entreabertas, como se a criança não terminasse as ações mentais de desdobramento.

Apesar de o trabalho de Piaget e Inhelder (1993) referir-se ao desenvolvimento cognitivo da criança, em seus estudos, Viana (2000, 2014) concluiu que vários desenhos de adolescentes pareciam muito semelhantes aos utilizados pelos autores citados para explicar o avanço na construção das noções projetivas ligadas ao espaço representativo.

No âmbito escolar, as experiências com as figuras espaciais nas aulas de geometria devem proporcionar oportunidades para a formação de conceitos e para o desenvolvimento das noções citadas. Se ao final do ensino médio, conforme indicam os PCN (BRASIL, 2000), o aluno deve dominar propriedades relativas aos poliedros e aos corpos redondos, interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais (como projeções, planificações, cortes e desenhos), subentende-se que deve também coordenar os diferentes pontos de vista das figuras geométricas mais comuns, garantindo, por hipótese, a elaboração de desenhos razoáveis de planificação dos sólidos. Entendem-se como desenhos razoáveis de planificação de poliedros (paralelepípedos, prismas, pirâmides) aqueles em que o sujeito demonstra identificar o número e a forma das faces a partir da apresentação das figuras em perspectiva. No caso dos corpos redondos (cilindro e cone), a superfície lateral e a(s) base(s) circular(es).

Assim, pretendeu-se avançar na análise dos desenhos de planificação, supondo que, mais que o conhecimento sobre propriedades das figuras, as planificações indiquem o desenvolvimento de relações espaciais estabelecidas pelos estudantes.

Apesar da vasta literatura recente sobre ensino de geometria que busca investigar os registros de representação semiótica e da ampla aplicação da teoria piagetiana nas questões educacionais – conforme pode ser visto em Clements *et al.* (1999) e em Kobayashi (2001, 2003) – não foram encontrados,

na breve revisão realizada, trabalhos que tratassem especificamente desse tema.

Diante do exposto e pretendendo contribuir para a avaliação de habilidades em geometria, duas perguntas foram formalizadas para esta pesquisa:

a) É possível avaliar, por meio de desenhos de planificação apresentados por estudantes ao final do ensino fundamental e do médio, se estes identificam propriedades das figuras geométricas espaciais mais comuns?

b) É possível avaliar, por meio dos desenhos citados, o estabelecimento de algumas relações espaciais que fazem parte do desenvolvimento das noções projetivas relativas à construção do espaço representativo, mesmo tratando-se de adolescentes?

AVALIANDO A IDENTIFICAÇÃO DE PROPRIEDADES POR MEIO DAS PLANIFICAÇÕES

Analisando as matrizes de referência utilizadas por alguns sistemas de avaliação, podem ser vistos, na área de Matemática (bloco Geometria/espço e forma), descritores relativos à geometria espacial. Foi possível observar que vários descritores indicam a planificação como forma de o aluno identificar as figuras espaciais, bem como suas propriedades. O Quadro 2 mostra alguns sistemas de avaliação federal e estaduais da região Sudeste em que foram verificados os descritores relativos ao bloco espaço e forma.

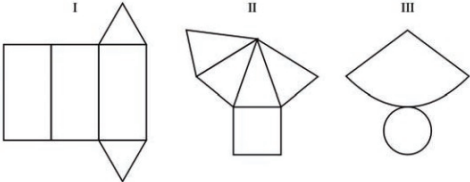
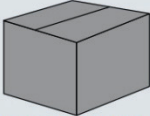
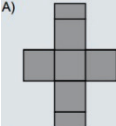

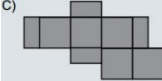
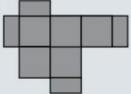
QUADRO 2 - Descritores constantes das matrizes de referência

SISTEMA DE AVALIAÇÃO	SÉRIE/ANO	BLOCO GEOMETRIA/ESPAÇO E FORMA
Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - Saesp (SÃO PAULO, 2009)	7º ano - EF	H18 - Identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.
	9º ano - EF	H23 - Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações.
	3ª série - EM	H25 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.
Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - Saeb - Prova Brasil (BRASIL, 2008)	5º e 9º ano - EF	D2 - Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações.
	3ª série - EM	D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública - Simave - Proeb (MINAS GERAIS, 2014a, 2014b, 2014c)	5º ano - EF	D3 - Relacionar figuras tridimensionais (cubo e bloco retangular) com suas planificações.
	9º ano - EF	D2 - Identificar propriedades de figuras tridimensionais, relacionando-as com suas planificações.
	3ª série - EM	D1 - Reconhecer a planificação de figuras tridimensionais mais usuais (prismas, pirâmides, paralelepípedo, cubo, cilindro e cone).
Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná - Saep (PARANÁ, s/d)	6º e 9º ano - EF e 1ª série - EM	D4 - Relacionar figuras tridimensionais à sua planificação ou vistas por meio de suas propriedades e vice-versa.
Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo - Paebes (ESPIRITO SANTO, 2013)	2ª e 3ª série - EM	D1/D2 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
	5º e 9º ano - EF	D2 - Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.
Sistema de Avaliação da Educação do Rio de Janeiro - Saerj (RIO DE JANEIRO, 2008)	3ª série - EM	D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

Fonte: Adaptado de Viana (2012).

Analizando as questões de algumas provas referentes aos sistemas de avaliação listados no Quadro 2, verifica-se que várias parecem estar de acordo com os respectivos descritores, ou seja, apresentam a planificação como forma de avaliar a identificação de propriedades das figuras (Exemplo 1 do Quadro 3); outras apresentam diferentes planificações para dada figura espacial, nomeada ou representada por meio de desenho em perspectiva. O aluno deve, então, movimentar mentalmente cada planificação e decidir qual delas é a correta (Exemplo 2 do Quadro 3).

QUADRO 3 – Exemplos de questões de provas oficiais

EXEMPLO 1: 3º ANO EM - SAERJ	EXEMPLO 2: 5º ANO – PROEB – SIMAVE
<p>Considere as figuras abaixo:</p>  <p>As figuras I, II e III correspondem, respectivamente, às planificações de:</p> <p>A) prisma, cilindro, cone. B) pirâmide, cone, cilindro. C) prisma, pirâmide, cone. D) pirâmide, prisma, cone. E) pirâmide, cone, prisma.</p>	<p>Roberto estava brincando com uma caixa em forma de cubo como a representada abaixo.</p>  <p>Qual das figuras abaixo melhor representa essa caixa depois de desmontada?</p> <p>A) </p> <p>B) </p> <p>C) </p> <p>D) </p>

Fonte: Rio de Janeiro (2008).

Fonte: Minas Gerais (2012).

A questão reproduzida no Exemplo 2 do Quadro 3 parece avaliar mais a habilidade espacial – entendida como a capacidade de formar e manipular imagens mentais – que o conhecimento de propriedades relativas à figura geométrica apresentada.

O documento elaborado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) esclarece alguns itens das matrizes da Prova Brasil e argumenta que o bloco de conhecimentos relativos ao espaço e forma “permite o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, possibilitando a descoberta de conceitos matemáticos de modo experimental” (BRASIL, 2008). Ao apresentar os resultados relativos à questão citada, o documento ora refere-se à habilidade, ora ao conhecimento das propriedades da figura:

Para identificar qual das planificações corresponde ao cubo, o aluno deve saber que este sólido possui 6 faces quadradas e congruentes. Além disso, o aluno deve ser capaz de visualizar os encaixes nas planificações apresentadas. Apesar da forma do cubo ser bem familiar, observa-se que os alunos que assinalaram as alternativas erradas desconhecem as propriedades básicas do sólido. (BRASIL, 2008)

Pode-se supor que a questão analisada esteja ligada ao estabelecimento de relações espaciais que, nesse caso, dizem respeito à capacidade de o sujeito coordenar os vários pontos de vista da figura tridimensional. Supõe-se que a ação mental requerida seja a de representar mentalmente a forma e os diferentes pontos de vista, modificar essa imagem “abrindo” as superfícies e buscar a representação referente a essa última imagem.

Assim, em vez de verificar se os alunos do ensino básico associavam o sólido à planificação correta, optou-se, neste trabalho, por analisar seus desenhos de planificação feitos a partir da apresentação de uma figura espacial em perspectiva. Pretendeu-se, dessa maneira, contribuir para o entendimento acerca das relações espaciais e da identificação das propriedades das figuras geométricas tridimensionais.

AVALIANDO O ESTABELECIMENTO DE RELAÇÕES ESPACIAIS POR MEIO DAS PLANIFICAÇÕES

Muitas das ações empregadas por estudantes em tarefas com o conteúdo de geometria espacial requerem a habilidade de formar imagens mentais, manter essas imagens, inspecioná-las, acrescentá-las, modificá-las e relacioná-las com outras figuras. Duval (2012) nomeia essas ações como apreensão operatória de uma figura, que consiste em realizar modificações – composição e decomposição, ampliação e redução e deslocamento em relação a um referencial.

Uma das maneiras de avaliar a apreensão operatória de figuras espaciais – em especial dos poliedros – é solicitar que o estudante identifique suas partes planas (faces); essa apreensão é denominada de desconstrução dimensional. De acordo com Duval (2009, p. 90), “a desconstrução dimensional é onipresente em toda definição, em todo raciocínio e em toda explicação em relação às figuras em geometria”. Planificar um paralelepípedo (figura tridimensional), por exemplo, é desconstruí-lo em seis retângulos (figuras bidimensionais) que devem ter as medidas e a disposição necessárias para a construção original.

Os desenhos de planificação produzidos pelos estudantes poderiam ser interpretados à luz da teoria dos registros

de representação semiótica (DUVAL, 2009), já que aqueles permitem o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes a toda representação: a formação, o tratamento (ou seja, as transformações regidas por regras dentro do mesmo sistema) e a conversão (quando se utiliza outro tipo de registro para representação do objeto matemático em questão).

Embora tente explicar a atividade cognitiva do sujeito em tarefas de geometria, a teoria não consegue analisar o desenvolvimento das operações mentais nem as dificuldades específicas dos estudantes do ensino fundamental e do médio quando eles tentam planificar as figuras espaciais. Assim, buscou-se, neste trabalho, interpretar os desenhos de planificação dos estudantes à luz da teoria piagetiana – o que não demonstra ser uma tarefa simples. Mais que explicar o desenvolvimento cognitivo, a teoria epistemológica piagetiana aprofunda nas relações entre o sujeito e o objeto no processo de conhecer, o que pode ser um profícuo quadro básico de análise para os problemas pedagógicos, conforme afirma Moro (1990).

Para entender algumas dificuldades apresentadas por alunos na aprendizagem dos conteúdos relativos ao bloco espaço e forma (BRASIL, 1997), pode-se lançar mão dos estudos de Piaget² acerca da evolução de certas formas de pensamento da criança relativas à construção do espaço.

De acordo com Piaget e Inhelder (1993), a criança constrói as noções de espaço por meio de uma liberação progressiva e gradual do egocentrismo. Essa construção se faz por etapas, em dois planos distintos: o plano perceptivo ou sensório-motor e o plano representativo ou intelectual. No primeiro caso, as primeiras noções construídas são as referentes ao espaço prático, da ação, que a criança constrói por meio dos sentidos e através de seus próprios deslocamentos. Com o aparecimento da linguagem e da representação simbólica em geral, começa a se constituir o espaço representativo.

Assim, há uma distinção entre o espaço perceptivo e o espaço representativo. A abstração de uma figura não é uma abstração perceptual de uma propriedade física, mas é resultado de uma coordenação das ações da criança, sejam ações sensório-motoras ou operações mentais. Fazer um desenho

² Existem pesquisas que discordam da ordem de construção das relações topológicas, projetivas e euclidianas, entre elas destacam-se as realizadas por Darke (1982), Kapadia (1974), Martin (1976), Liben (1978), Rosser *et al.* (1984), citados por Clements *et al.* (1999).

é uma ação de representação, não de percepção; os autores explicam que desenhos imprecisos das crianças refletem que o fundamento do desenvolvimento conceitual do espaço consiste na coordenação das ações e não em uma percepção passiva.

O espaço representativo é subdividido em espaço intuitivo e espaço operatório.³ Piaget estabelece um paralelo entre as operações concretas de caráter lógico-aritmético e as operações concretas de caráter espaçotemporal. As primeiras apoiam-se exclusivamente nas relações de semelhanças (classes e relações simétricas), de diferenças (relações assimétricas) ou das duas ao mesmo tempo, sendo que tais relações são inferidas pelo sujeito a partir de ações com objetos discretos, reunidos em conjuntos descontínuos e independentes de sua configuração espacial. São elas que irão permitir, por exemplo, a construção do número pela criança. Ao passo que as operações de caráter espaçotemporal ou infralógico⁴ acabam na construção de esquemas únicos e contínuos e são as constitutivas das noções de espaço, descritas a seguir.

As relações que a criança estabelece e que permitem a construção da noção de espaço, seja este perceptivo ou representativo, são as relações topológicas, as projetivas e as euclidianas (PIAGET; INHELDER, 1993).

Na construção do espaço perceptivo ou sensório-motor, a criança estabelece as relações topológicas mais elementares: de vizinhança ou proximidade (quando a criança, por exemplo, percebe a proximidade dos elementos num mesmo campo); separação (quando percebe que os objetos ocupam posições distintas no espaço); ordem ou sucessão (quando estabelece relação de ordem, em uma organização espacial); envolvimento ou fechamento (quando relaciona o que está entre, ou então o que está dentro ou fora – em duas ou três dimensões); continuidade (quando reconhece e representa pontos em sequência). As relações topológicas elementares são construídas entre partes vizinhas de um mesmo objeto ou então entre um objeto e sua vizinhança imediata, de modo contínuo e sem referência às distâncias. Um espaço topológico é, pois, uma reunião contínua de elementos, deformáveis por estiramentos ou contrações. Assim, as relações

3 Uma operação é uma ação interiorizada e reversível ou um grupo de ações que modifica o objeto do conhecimento (por exemplo, operação de reunir objetos em uma classe para construir uma classificação; ordenar ou colocar coisas em uma série) e que possibilita ao sujeito construir as estruturas lógicas.

4 O termo "infralógico" não significa que essas operações sejam inferiores às operações lógico-aritméticas, mas simplesmente que elas são formadoras da noção do objeto como tal, em oposição aos conjuntos de objetos.

topológicas permitem à criança distinguir figuras abertas e fechadas, mas não permitem que ela faça distinção entre um círculo e um quadrado.

As relações projetivas permitem a coordenação dos objetos entre si num sistema de referência móvel, dado pelo ponto de vista da própria criança. As noções de direita e esquerda e localização de objetos sob vários pontos de vista são exemplos dessas relações. O espaço projetivo não conserva ainda as distâncias e as dimensões como um sistema de coordenadas,⁵ mas conserva as posições relativas dos elementos das figuras ou das figuras em relação às outras.

As relações euclidianas permitem localizar objetos em um sistema de referência e têm como base a noção de distância. Para tal construção, são necessárias a conservação de distância, de comprimento e superfície; a construção de medida em uma, duas ou três dimensões; a elaboração de um sistema de coordenadas para localização no plano e no espaço e as conseqüentes transformações geométricas (as que preservam comprimento e ângulo – translação, rotação, simetria – e as que preservam apenas ângulos – semelhanças). Embora haja distinção entre os espaços projetivo e euclidiano, as duas construções são solidárias, pois, à medida que chega a coordenar os pontos de vista de um objeto, o sujeito consegue coordenar as distâncias e, assim, localizar objetos tendo como referência um sistema de coordenadas.

Quando a criança reconhece um objeto quadrado feito de madeira visto em perspectiva, ela coordena uma correspondência projetiva entre duas perspectivas distintas (de frente, de lado), com uma correspondência euclidiana que garante o reconhecimento dos lados iguais do quadrado. Da mesma forma, reconhecer o objeto a distância é reconstituir uma grandeza métrica (euclidiana) de uma figura diminuída pela perspectiva (projetiva). Portanto, o espaço perceptivo é construído segundo uma ordem de sucessão que vai de relações topológicas iniciais a relações projetivas e métricas, depois, finalmente, a relações de conjuntos, ligadas aos deslocamentos dos objetos, uns em relação aos outros.

De acordo com Piaget e Inhelder (1993), a construção do espaço representativo envolve o estabelecimento das

5 “Um sistema de coordenadas é comparável a uma tabela de dupla ou tripla entrada, na qual todos os objetos do espaço são ordenados em correspondência biunívoca uns com os outros segundo as diversas colunas ou compartimentos previstos; [...] os objetos são considerados em si mesmos [...] em suas relações métricas” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 437).

mesmas relações descritas, embora exista um intervalo de alguns anos entre a construção do espaço perceptivo e a do representativo. Uma das maneiras de os autores estudarem o início da representação foi analisar os desenhos que as crianças faziam de certos modelos, incluindo-se aqui algumas figuras geométricas planas sozinhas, ligadas com outras, sobrepostas, etc. Em um primeiro estágio, a criança desenhou garatujas, depois ela conseguiu representar figuras abertas e fechadas (relações topológicas), depois distinguiu formas retilíneas de curvilíneas (relações euclidianas). Na sequência, representou ângulos e medidas, linhas oblíquas e composição progressiva de figuras encaixadas.

Ainda estudando as noções constituintes do espaço representativo, os autores analisaram os desenhos de perspectivas, a projeção de sombras, o relacionamento de perspectivas, as operações de secção e os rebatimentos e desenvolvimentos de superfícies, buscando, dessa forma, entender como as crianças construía as noções projetivas. Estas supõem uma coordenação entre objetos espaciais distintos, considerados relativamente a um “ponto de vista”.

Entre os estudos citados, destacam-se os rebatimentos e desenvolvimentos de superfícies, ou seja, a planificação de poliedros e de corpos redondos, brevemente relatados a seguir.

Uma das tarefas apresentadas aos sujeitos, crianças entre 4 e 12 anos, consistia no desenho da planificação do cilindro, do cone, do cubo e da pirâmide. Os autores explicam que poderiam oferecer à criança desenhos preparados, com alguns representando as soluções corretas e outros com erros, para que ela reconhecesse as planificações mais convenientes; no entanto, consideraram que a escolha correta do desenho poderia não refletir o pensamento da criança quanto às noções a serem estudadas.

Foi possível verificar que, antes dos quatro anos, a criança não conseguia fazer as representações, o que caracterizou o estágio I. O estágio II foi caracterizado por uma indiferenciação completa ou parcial dos pontos de vista. No subestádio II A, entre cinco e seis anos, o desenho da figura em perspectiva e o desenho da planificação permaneciam quase idênticos; em outros casos, a planificação era representada

por uma única figura (quadrado para o cubo, triângulo para a pirâmide), como se o objeto fosse representado, quase simbolicamente, por um de seus aspectos. Notou-se também, nessa fase, uma “mistura de pontos de vista” quando o desenho representava pontos de vista distintos de uma mesma figura, porém sem coordenação entre eles. Nesse estágio, os desenhos indicaram uma representação topológica, visando ao objeto em si mesmo e exprimindo as relações de vizinhança, separação, ordem, etc., sem coordenação euclidiana nem projetiva.

O subestádio II B marcou um início da diferenciação de pontos de vista entre o desenho em perspectiva e o planificado, sendo que a forma mais simples de mostrar essa diferenciação era marcar a intenção de desdobramento por uma linha, que indicaria a direção do movimento. Em alguns casos, o sujeito repetia o desenho em perspectiva, apenas inclinando em posição horizontal ou outra posição. Foram encontrados, ainda, desenhos em que as faces ou superfícies apareciam representadas em separado ou justapostas, mas sem forma de conjunto. Em resumo, nesse estágio, os sujeitos não conseguiram desligar-se de sua visão atual para imaginar as planificações, indicando apenas a intenção de desdobramento.

O estágio III marcou a descoberta da planificação, sendo feita em duas etapas. No subestádio III A (7 a 9 anos), a criança representava uma fase do desdobramento, mas não ainda o resultado da ação completa. Duas situações foram aqui identificadas. Em uma delas, a qual Piaget e Inhelder (1993) chamaram de forma estática, a criança parecia decompor e analisar as partes da figura, mas estas não eram representadas ordenadamente. Em outra situação, era verificada uma forma mais dinâmica, em que a ação em curso – e sem previsão de seu estado final – era representada: a criança parecia preocupada em manter e ordenar a vizinhança entre os elementos, mas com rebatimentos incompletos, parciais, como se as faces e as superfícies estivessem entreabertas.

No subestádio III B (9, 10 anos), as soluções corretas foram atingidas – pelo menos no que se refere ao cilindro –, sendo que o cubo e a pirâmide pareceram um pouco mais

difíceis; o desenvolvimento inteiramente exato desta última não foi atingido antes do estágio IV (11, 12 anos), isto é, antes da planificação do cone. Os desenhos corretos indicavam as operações projetivas realizadas pelo sujeito, que consistem em coordenações de pontos vista e de movimentos.

Assim, a percepção das diversas faces dos poliedros, bem como das superfícies do cilindro e do cone, não parece ser suficiente para a ação mental de desdobrar essas figuras e para a representação do desenho da planificação no papel. O espaço geométrico não é um puro decalque do espaço físico, já que a reconstrução das formas não consiste simplesmente em isolar qualidades perceptivas do objeto, mas é decorrente de um relacionamento ativo que implica uma abstração a partir das ações do sujeito e de suas coordenações progressivas. A construção das formas geométricas implica a acomodação do sujeito aos objetos de tais ações e também a assimilação do objeto às coordenações das ações (PIAGET, 1995).

O presente trabalho pretendeu trazer a interpretação piagetiana aqui exposta para analisar os desenhos de planificação dos estudantes de ensino fundamental e médio, sujeitos da pesquisa.

OBJETIVO, SUJEITOS, MATERIAIS E PROCEDIMENTOS

Esta pesquisa teve por objetivo analisar desenhos de planificação elaborados por estudantes de ensino básico, de modo a avaliar:

- a) A identificação de propriedades das figuras geométricas espaciais mais comuns estudadas ao longo do ensino básico.
- b) O estabelecimento de relações espaciais designadas como noções projetivas referentes à construção do espaço representativo.

⁶ As cidades foram Ituiutaba, Capinópolis, Canápolis, Ipiacú, Gurinhatã e Monte Alegre, todas situadas na região do Pontal de Minas Gerais, em que está inserida a Universidade Federal de Uberlândia (UFU), campus Pontal.

Foram sujeitos 842 alunos do 9º ano do ensino fundamental e da 3ª série do ensino médio (Tabela 1) de escolas públicas de cidades situadas na região do Pontal de Minas Gerais,⁶ o que caracterizou uma amostra de conveniência.

A escolha dessas séries se deu pelo fato de indicarem os finais de dois níveis de ensino e assim poderem caracterizar avanços no desenvolvimento dos conceitos e noções apresentados nos objetivos da pesquisa.

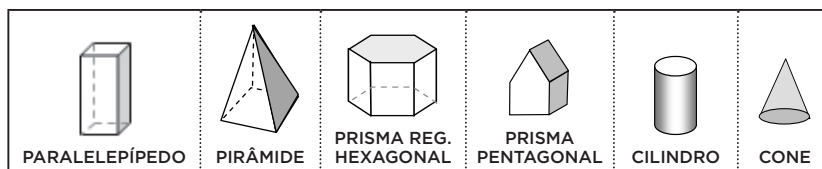
TABELA 1 - Distribuição de frequência dos alunos por idade e por série

VARIÁVEL	N	%
IDADE		
12 a 14 anos	362	43,0
15 a 17 anos	425	50,5
18 anos ou mais	55	6,5
Total	842	100,0
SÉRIE		
9º ano do EF	534	63,4
3ª série do EM	308	36,6
Total	842	100,0

Fonte: Elaboração da autora.

O instrumento, tipo lápis e papel, foi aplicado individualmente aos sujeitos durante a aula e com prévia autorização do professor e da direção da escola. Nele havia desenhos em perspectiva das figuras: paralelepípedo, pirâmide de base quadrada, prisma regular de base hexagonal, prisma pentagonal não regular, cilindro e cone (Quadro 4). Foi solicitado ao aluno que desenhasse as planificações dessas figuras, sendo antes apresentados dois exemplos de planificação do cubo, para que não houvesse dúvidas quanto à solicitação. Convém esclarecer que a maioria das planificações foi feita à mão livre, ou seja, sem a utilização de instrumentos de desenho. Assim, não foram considerados os erros de medidas ou a retidão das linhas que dependeriam desses instrumentos.

QUADRO 4 – Figuras constantes do instrumento



Fonte: Elaboração da autora.

Foram estabelecidas algumas categorias para a análise dos desenhos, de modo a atender aos objetivos propostos. Essas categorias foram representadas por cinco níveis que sugeriram diferenças qualitativas na identificação de propriedades e no estabelecimento das relações espaciais para cada figura.

RESULTADOS

Para analisar os desenhos de planificação, foram criadas cinco categorias indicando níveis crescentes que refletem a qualidade das representações.












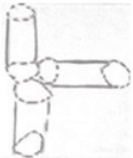


















- **Nível 1:** nessa categoria, há desenhos da planificação que são muito parecidos com o desenho da figura em perspectiva; em outras vezes, este é duplicado. Há desenhos indecifráveis e outros em que, apesar de apresentarem algumas superfícies, não há possibilidade de movimentação para se formar a figura.
- **Nível 2:** as planificações classificadas nessa categoria podem apresentar algumas faces dos poliedros, porém algumas em perspectiva, outras não organizadas ou incompletas, ou, ainda, com erros acentuados de ângulos e medidas. As superfícies laterais dos cilindros e cones parecem ter sido percebidas, mas não as formas corretas, ou seja, retângulo e setor, respectivamente; os círculos parecem “enterrados” na superfície lateral dessas figuras.
- **Nível 3:** os desenhos ainda apresentam falhas: faltam faces nos poliedros, as medidas e os ângulos não tornam os polígonos semelhantes às faces ou congruentes entre si (quando era o caso). Algumas faces

(ou mesmo os círculos) permanecem representadas em perspectiva e em alguns casos a movimentação e a junção das faces seriam impossíveis. O retângulo da superfície lateral do cilindro e o arco de setor – nem sempre identificado – do cone não mantêm comprimento aproximado ao da circunferência, que é a base de cada sólido.

- **Nível 4:** as planificações dos poliedros têm número de faces correto, mas ainda há erros de medidas e ângulos. A movimentação e a organização das faces são possíveis, são desenhadas as superfícies laterais do cilindro e do cone e as respectivas bases, mas ainda com medidas erradas.
- **Nível 5:** as planificações dos poliedros são consideradas corretas: os polígonos, em quantidade correta, preservam número de lados, medidas de lados e ângulos corretos, apesar da não utilização de instrumentos de desenho, em alguns casos. O cilindro foi representado por retângulo e dois círculos tangentes aos dois lados maiores do retângulo, e o cone, por setor circular de ângulos variando entre 120° e 180° e círculo tangente ao arco.







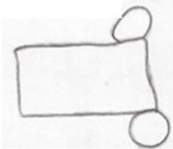

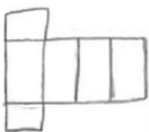
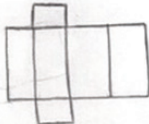

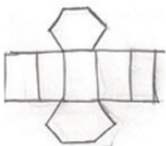

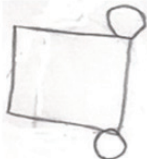




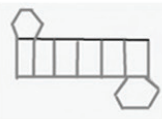
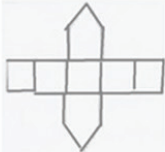
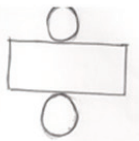

Alguns exemplos que ilustram as categorias formadas são mostrados no Quadro 5.

QUADRO 5 - Exemplos de planificações executadas pelos alunos, apresentadas de acordo com os 5 níveis de análise considerados. Codificações utilizadas: PA-paralelepípedo, PI-pirâmide, PH- prisma hexagonal, PP- prisma pentagonal, CI-cilindro e CO-cone

NÍVEL 1					
					
PA-1a	PA-1b	PA-1c	PI-1a	PI-1b	
					
PI-1c	PH-1a	PH-1b	PP-1a	PP-1b	
					
CI-1a	CI-1b	CI-1c	CO-1a	CO-1b	CO-1c
NÍVEL 2					
					
PA-2a	PI-2a	PI-2b	PH-2a	PH-2b	
					
PP-2a	PP-2b	PP-2c	CI-2a	CI-2b	
					
CI-2c	CI-2d	CI-2e	CO-2a		

(continua)

QUADRO 5 - Exemplos de planificações executadas pelos alunos, apresentadas de acordo com os 5 níveis de análise considerados. Codificações utilizadas: PA-paralelepípedo, PI-pirâmide, PH- prisma hexagonal, PP- prisma pentagonal, CI-cilindro e CO-cone

NÍVEL 3					
					
PA-3a	PI-3a	PI-3b	PI-3c		
					
PH-3a	PH-3b	CI-3a	CO-3a		
NÍVEL 4					
					
PA-4a	PA-4b	PI-4a	PH-4a		
					
PP-4a	CI-4a	CI-4b	CO-4a		
NÍVEL 5					
					
PA-5a	PI-5a	PH-5a	PP-5a	CI-5a	CO-5a

Fonte: Elaboração da autora.

Na Tabela 2, os dados destacados mostram as duas maiores porcentagens para cada figura e pode-se notar a alta frequência de alunos que não desenharam as planificações.

TABELA 2 - Distribuição de frequência dos alunos de ambas as séries avaliadas segundo os níveis de planificação executados para cada figura

FIGURA	NÍVEL	9.º ANO DO EF		3.ª SÉRIE DO EM	
		N	%	N	%
PARALELEPÍPEDO	1	84	15,7	18	5,8
	2	63	11,8	26	8,4
	3	79	14,8	26	8,4
	4	116	21,7	81	26,3
	5	59	11,0	80	26,0
	Não resposta	133	24,9	77	25,0
	Total	534	100,0	308	100,0
PIRÂMIDE	1	79	14,8	28	9,1
	2	53	9,9	18	5,8
	3	71	13,3	30	9,7
	4	73	13,7	47	15,3
	5	87	16,3	86	27,9
	Não resposta	171	32,0	99	32,1
	Total	534	100,0	308	100,0
PRISMA REGULAR HEXAGONAL	1	105	19,7	38	12,3
	2	58	10,9	39	12,7
	3	60	11,2	33	10,7
	4	47	8,8	35	11,4
	5	28	5,2	42	13,6
	Não resposta	236	44,2	121	39,3
	Total	534	100,0	308	100,0
PRISMA NÃO REGULAR PENTAGONAL	1	161	30,1	57	18,5
	2	65	12,2	52	16,9
	3	21	3,9	15	4,9
	4	34	6,4	17	5,5
	5	6	1,1	17	5,5
	Não resposta	247	46,3	150	48,7
	Total	534	100,0	308	100,0
CILINDRO	1	155	29,0	74	24,0
	2	64	12,0	37	12,0
	3	45	8,4	29	9,4
	4	61	11,4	41	13,3
	5	19	3,6	29	9,4
	Não resposta	190	35,6	98	31,8
	Total	534	100,0	308	100,0
CONE	1	236	44,2	109	35,4
	2	42	7,9	29	9,4
	3	16	3,0	16	5,2
	4	17	3,2	21	6,8
	5	16	3,0	21	6,8
	Não resposta	207	38,8	112	36,4
	Total	534	100,0	308	100,0

Fonte: Elaboração da autora.

Observa-se que as figuras com melhores resultados foram o paralelepípedo (Nível 4) e a pirâmide (Nível 5). É interessante verificar a variação da frequência para os dois prismas. O prisma não regular pentagonal, ao contrário do regular, foi a figura menos planificada pelos sujeitos e a com maior taxa de planificações de Nível 1 e 2, mesmo entre estudantes do ensino médio. Entre os corpos redondos, o cilindro é planificado erroneamente por boa parte dos sujeitos, inclusive os do ensino médio. Mas, de todas as figuras, o cone pareceu ter sido a mais difícil, já que é alta a soma entre a frequência relativa às planificações de Nível 1 e àquela referente aos que não responderam à questão (83% para o ensino fundamental e 71,8 para o ensino médio).

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Uma das primeiras propriedades de um poliedro a ser identificada pelos alunos do ensino fundamental é sua constituição por faces poligonais; no caso de cilindros e cones, suas bases circulares. As planificações classificadas no Nível 1 parecem demonstrar que os sujeitos que as fizeram não reconheciam essas propriedades – nem mesmo diferenciavam figuras planas de espaciais – já que em boa parte dos desenhos replicava-se a figura original em perspectiva.

Nessa situação, pode-se supor que os sujeitos tenham percebido as faces e os círculos. No entanto, a maneira de desenhá-los parece indicar que eles não tinham desenvolvido algumas noções projetivas relativas ao espaço em nível representativo. Os desenhos reunidos no Nível 1 têm características semelhantes àqueles elaborados pelos sujeitos classificados por Piaget e Inhelder (1981), na tarefa de rebatimento de planos e desenvolvimento de superfícies, como pertencentes ao estágio II. Os autores definem que, nesse estágio, estaria presente uma indiferenciação parcial dos pontos de vista de uma figura, mantidos pela criança. Podem ser verificados, no Quadro 5, além de desenhos indecifráveis (PH-1b), aqueles em que o objeto e a planificação seriam quase idênticos (PI-1a) e os que marcam um início de diferenciação que pode ser observado por meio da duplicação da figura (PP-1b), por

um esboço de rebatimento de faces (PA-1b e PI-1c) – mas ainda preso ao desenho do objeto ou pela representação da ação de rasgar o papel (CO-1c). Em resumo, nessa categoria, a situação mais verificada foi aquela em que o sujeito, de certa maneira, manteve a imagem da figura tridimensional na representação. Isso deve revelar que o sujeito não identificava propriedades relativas à diferenciação entre figuras planas e espaciais e não conseguia representar outro ponto de vista do objeto. Os exemplos dessa categoria parecem demonstrar a preocupação do sujeito em manter e ordenar a vizinhança entre os elementos, mas, como visava ao objeto em si mesmo, ele fez os desenhos sem coordenação projetiva ou euclidiana, o que caracteriza as representações topológicas.

Os desenhos classificados no Nível 2 exibem algum avanço em relação ao nível anterior, demonstrando que o sujeito identificou algumas propriedades da figura apresentada. As representações parecem corresponder ao início do estágio III, caracterizado por Piaget pela compreensão progressiva da operação de desenvolvimento (para o cilindro e cone) e de rebatimento (para os poliedros). Parece que, além de figurar a ação de desdobrar – como um esboço do próprio movimento –, o sujeito começou a coordenar os pontos de vista. Esse início de coordenação dos pontos de vista foi marcado por dois tipos de reação que puderam ser observados. O primeiro tipo – uma forma mais estática – seria a representação de uma ou mais fases descontínuas do desenvolvimento, sem previsão, em seu conjunto, do resultado das ações, como se o sujeito não pudesse segui-las em pensamento. Assim, separou o desenho em duas ou três partes (PH-2a, CI-2a, CI-2c) ou desenhou algumas faces (PI-2a). O segundo tipo de relações – mais dinâmico – consistiu em representar a planificação como se a ação de desdobramento estivesse em curso, inacabada, com algumas faces em perspectiva – como se a figura estivesse entreaberta (PA-2a, PI-2b, PP-2c) – ou ainda presa à configuração tridimensional (PH-2b, PP-2a); em alguns casos, os círculos aparecem enterrados na superfície lateral (CI-2b e CI-2d). Os desenhos incluídos nessa categoria sugerem que os sujeitos estavam em um processo de transição entre a ação e a operação, já que a imagem – nos dois tipos de reação des-

critos – parecia não conseguir antecipar as ações: tratava-se de ações não coordenadas entre si e, portanto, não de operações. A operação é um sistema de ações coordenadas entre si de modo transitivo e reversível; no caso da planificação, a representação teria caráter operatório se fosse resultado de uma coordenação de conjunto dos múltiplos pontos de vista projetivos possíveis sobre o objeto em questão e, correlativamente, uma estruturação euclidiana do espaço segundo um sistema de coordenadas. Por não ter estabelecido essas coordenações, o sujeito ora não rebateu as faces todas, ora desenhou as faces ainda em perspectiva, ora as apresentou sem conexão entre si.

As planificações de Nível 3 demonstram, no caso dos poliedros, que o sujeito identificava a forma das faces, mas vários erros foram cometidos: faces esquecidas (PA-3a, PI-3b), erros nas medidas e nas vizinhanças das faces, impedindo a movimentação do conjunto (PI-3a, PH-3a, PI-3b, CO-3a) e as bases foram desenhadas como se estivessem em perspectiva (PH-3b).

Houve ainda alguns erros de medidas nas planificações de Nível 4 (CI-3a), os quais quase não são verificados nas de Nível 5: o desenho foi mostrado em seu conjunto, com todas as relações estabelecidas, preservando as linhas retas, as medidas, o paralelismo e os ângulos.

Piaget e Inhelder (1993) concluíram que, em virtude do não desenvolvimento de todas as relações abrangidas na construção do espaço representativo, as crianças apresentariam inabilidade para desenhar figuras. No caso dos sujeitos do presente estudo, a maioria entre 12 e 17 anos, a imprecisão dos desenhos de planificação parece indicar, de modo semelhante ao observado nas crianças, a natureza ainda não operatória das relações projetivas.

Parece evidente, quando são analisadas as planificações dos sujeitos, que a percepção de figuras geométricas espaciais é sempre relativa a um ponto de vista. No entanto, para a representação, é necessário que o indivíduo tome consciência desse ponto de vista, isto é, diferencie esse ponto de vista dos outros para, e em consequência, coordená-lo com outros. A representação chamada de projetiva – que foi observada

nas planificações – não é um simples decalque da percepção correspondente, mas supõe a intervenção de ações propriamente ditas. As imagens dessas ações constituem a imitação interiorizada e, quando a regulação completa das ações atinge o nível das composições reversíveis, pode-se falar em representações projetivas operatórias. Convém acrescentar que as ações interiorizadas não dizem respeito somente ao objeto ou ao deslocamento, mas são relativas ao próprio sujeito e consistem em ligar uns aos outros os diversos pontos de vista e fazê-los corresponder a esse ponto de vista único, representado pela superfície planificada.

No caso dos desenhos de níveis 4 e 5, a representação parece ter caráter operatório, pois é resultado de uma coordenação de conjunto dos múltiplos pontos de vista projetivos possíveis sobre o objeto em questão e, correlativamente, uma estruturação euclidiana do espaço segundo um sistema de coordenadas.

Convém notar que aqueles sujeitos que elaboraram desenhos de Nível 1 para o paralelepípedo (12,1% do total) também não obtiveram classificação melhor para as outras figuras; no entanto, os que elaboraram planificações de Nível 5 (16,5% do total) realizaram planificações menos elaboradas para as outras figuras.

Isso parece demonstrar que a qualidade das relações projetivas estabelecidas e demonstráveis em tarefas de planificação está ligada à experiência do sujeito com a figura em questão – e não expressa, totalmente, um nível geral de desenvolvimento quanto à construção dessas noções. Realmente, o paralelepípedo é a figura espacial mais presente no cotidiano do aluno e também a mais explorada no ensino básico, o que pode explicar o melhor desempenho dos sujeitos na tarefa de planificar essa figura. Estranha-se, no entanto, que seu desempenho na planificação do cilindro – outra figura bem conhecida desde as séries iniciais – tenha sido tão insuficiente: a porcentagem de planificações de Nível 3 ou 4 não chega a 23% dos sujeitos do ensino médio. É nessa etapa do ensino básico que são trabalhadas, por exemplo, as fórmulas que calculam a área da base, da superfície lateral e a total do cilindro – o que pressupõe identificação dessas

propriedades. É também no ensino médio que são estudados alguns postulados relativos à geometria de posição (por exemplo, planos paralelos, perpendiculares, etc.), o que necessitaria coordenação de pontos de vista de uma figura: o fraco desempenho na tarefa de planificar os poliedros parece mostrar que os sujeitos não estabeleciam essas relações. Além disso, no ensino médio são calculados as áreas e os volumes de prismas e pirâmides regulares ou não, o que pressupõe identificação de bases e de superfícies das figuras citadas e o estabelecimento de relações euclidianas que permitam os cálculos envolvendo medidas de lados e ângulos: apenas 11% dos sujeitos do ensino médio acertaram a planificação do prisma pentagonal não regular.

O estudo mostra a aparente influência da capacidade de operar com imagens no desempenho das tarefas de geometria – o que está de acordo com os resultados encontrados na literatura recente (DOBARRO; BRITO, 2010; PITTALIS; CHRISTOU, 2010) – e confirma as dificuldades de alunos do ensino básico já constatadas por pesquisas da área (PROENÇA; PIROLA, 2009, 2011). Análises mais aprofundadas poderão explicar melhor as diferenças de desempenho dos sujeitos, o que constituirá a continuidade deste estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho aqui descrito procurou entender o que pode ser avaliado a partir dos desenhos de planificação das principais figuras geométricas tridimensionais estudadas ao longo da formação básica feitos por estudantes ao final do ensino fundamental e do médio. Na perspectiva teórica adotada, foi discutido que os desenhos não revelam a percepção de uma figura espacial, mas o estabelecimento de relações referentes ao plano representativo da construção do espaço.

Os resultados aqui apresentados permitem questionar os pressupostos adotados pelos sistemas de avaliação em larga escala, que incluem questões de planificação em suas provas com base nos descritores de suas matrizes de referência. Ou seja, fazer o aluno reconhecer a planificação correta de uma figura (entre alternativas apresentadas) pode ser uma

forma de verificar se o estudante identifica algumas propriedades das figuras tridimensionais e se relaciona as figuras planas com as espaciais. No entanto, questões desse tipo não revelam as dificuldades que tem o estudante em coordenar os pontos de vista da figura e em estabelecer as relações concernentes a medidas e ângulos – conceitos imprescindíveis no estudo da geometria métrica e de posição.

O fraco desempenho dos sujeitos na tarefa de planificação proposta no contexto desta pesquisa permite concluir que muitos deles – mesmo os do ensino médio – não identificavam as principais propriedades das figuras espaciais e também tinham dificuldades de estabelecer as relações projetivas e euclidianas. Pode-se supor que faltaram experiências com as formas geométricas apresentadas apesar de estas serem bastante comuns nos livros didáticos de matemática.

Os PCN (BRASIL, 1997) sugerem que devem ser dadas oportunidades que permitam a exploração de propriedades de figuras tridimensionais a fim de favorecer a formação de conceitos e o desenvolvimento do pensamento geométrico – o que pressupõe avanço nos níveis de compreensão, conforme exposto por Van Hiele (1986). Duval (2012) indica que, embora a apreensão dos objetos matemáticos seja conceitual, a atividade cognitiva sobre esses objetos só é possível por meio das representações semióticas. Como decorrência, Kaleff (2007) argumenta que toda atividade matemática promovida nas escolas não pode prescindir de utilizar as mais variadas formas de representação.

Nesse sentido, considera-se que pedir ao estudante que desenhe a planificação – ao contrário de solicitar o reconhecimento de uma planificação pronta – pode contribuir para a representação (e não apenas para a percepção) das propriedades das figuras geométricas espaciais.

Além disso, considera-se que o longo caminho para o desenvolvimento dos conceitos referentes à geometria espacial em nível mais formal – conforme se pretende alcançar ao final do ensino médio, principalmente no estudo da geometria métrica e de posição – não deve prescindir da construção das noções constitutivas do espaço representativo, em especial das relações projetivas brevemente apresentadas neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOU, S. A. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, 2011. p. 125-148.
- BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H. Research into practice: using spatial imagery in geometric reasoning. *Arithmetic Teacher*, v. 39, n. 3, p. 18-21, 1991.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: 1º e 2º ciclos do ensino fundamental*. Brasília, DF: MEC, 1997.
- _____. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: 3º e 4º ciclos do ensino fundamental*. Brasília, DF: MEC, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, DF: MEC, 2000.
- _____. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília, DF: MEC, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação. *Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília, DF: MEC, SEB; Inep, 2008. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/saeb/matrizes-de-referencia-professor>>. Acesso em: 25 maio 2014.
- CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Macmillan, 1992. p. 420-464.
- CLEMENTS, D. H.; SWAMINATHA, S.; HANNIBAL, M. Z.; SARAMA, J. Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 30, n. 2, p. 192-212, 1999.
- DE VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele. Tradução de Celina A. A. P. Abar. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010.
- DOBARRO, V. R.; BRITO, M. R. F. Um estudo sobre a habilidade matemática na solução de problemas de geometria. *REnCiMa*, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 34-46, 2010.
- DUVAL, R. Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, n. 76, p. 7-27, 2005. Disponível em: <www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/76/76n2.pdf>. Acesso em: 15 out. 2015.
- _____. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Tradução de L. F. Levy e M. R. A. Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Tradução de Marlene Alves Dias; Organização de Tânia M. M. Campos. São Paulo: USP/Proem, 2011.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de M. T. Moretti. *Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>>. Acesso em: 15 out. 2015.

ELIA, I.; EVANGELOU, K. Kindergarten teachers' use of semiotic resources in providing early learning experiences in geometry with a picture book as a didactical tool. In: LINDMEIER, A. M.; HEINZE, A. (Ed.). CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 37., 2013, Kiel, Germany. *Proceedings...* Kiel, Germany: PME, 2013. n. 2, p. 257-264.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Educação. *Matriz de Referência de Matemática: Paebes-Alfa 1º ao 3º ano/série do ensino fundamental*. SEE/ES, 2013. Disponível em: <www.paebesalfa.caedufjf.net/wp-content/uploads/2013/07/Matriz_PAEBES_ALFA_MT.pdf>. Acesso em: 15 out. 2015.

FEZA, N.; WEBB, P. Assessment standards, Van Hiele levels, and grade seven learners' understandings of geometry. *Pythagoras*, n. 62, p. 36-47, 2005.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, v. 24, n. 22, p. 139-162, 1993.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 1, n. 1, p. 5-13, 2006.

FRADE, R. *Composição e/ou decomposição de figuras planas no ensino médio: Van Hiele, uma opção*. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

KALEFF, A. M. R. Registros semióticos e obstáculos cognitivos na resolução de problemas introdutórios às geometrias não euclidianas no âmbito da formação de professores de Matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 20, n. 28, p. 69-94, 2007.

KALOGIROU, P.; ELIA, I.; GAGATSI, A. The relationship between visualization, spatial rotation, perceptual and operative apprehension. In: LINDMEIER, A. M.; HEINZE, A. (Ed.). CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 37., 2013, Kiel, Germany. *Proceedings...* Kiel, Germany: PME, 2013. n. 1, p. 129-136.

KOBAYASHI, M. C. M. *A construção da geometria pela criança*. Bauru: Edusc, 2001.

_____. *A representação espacial infanto-juvenil: as relações entre a geometria axiomática e a geometria vivida*. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Marília, 2003.

KOTZÉ, G. Investigating shape and space in mathematics: a case study. *South African Journal of Education*, v. 27, n. 1, p. 19-35, 2007.

MINAS GERAIS. Secretaria da Educação. Simave – PROEB 2012. Matemática 5º ano do Ensino Fundamental. *Revista pedagógica*, Juiz de Fora, v. 1, jan./dez. 2012. Disponível em: <http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2013/07/PROEB_MT_5EF_2012.pdf>. Acesso em: 11 dez. 2015.

_____. Simave – PROEB 2014. Matemática 5º ano do Ensino Fundamental. *Revista pedagógica*, Juiz de Fora, v. 1, jan./dez. 2014a. Disponível em: <<http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/06/MG-PROEB-2014-RP-MT-5EF-WEB.pdf>>. Acesso em: 11 dez. 2015.

_____. Simave – PROEB 2014. Matemática 9º ano do Ensino Fundamental. *Revista pedagógica*, Juiz de Fora, v. 1, jan./dez. 2014b. Disponível em: <<http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/06/MG-PROEB-2014-RP-MT-9EF-WEB.pdf>>. Acesso em: 11 dez. 2015.

_____. Simave – PROEB 2014. Matemática 3º ano do Ensino Médio. *Revista pedagógica*, Juiz de Fora, v. 1, jan./dez. 2014c. Disponível em: <<http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/06/MG-PROEB-2014-RP-MT-3EM-WEB.pdf>>. Acesso em: 11 dez. 2015.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, 2011. p. 149-160.

MORO, M. L. F. A epistemologia genética e a educação: algumas implicações. *Em Aberto*, Brasília, DF, ano 9, n. 48, p. 39-44, 1990. Disponível em: <<http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/745/667>>. Acesso em: 15 out. 2015.

PARANÁ. Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná. *Matriz de Referência de Matemática – Saep*. s.d. Disponível em: <www.saep.caedufjf.net/matrizes/matriz-de-referencia/>. Acesso em: 25 jun. 2014.

PIAGET, J. *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Tradução de F. Becker e P. B. G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, J.; INHELDER, B. *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C. Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, v. 75, n. 2, p. 191-212, 2010.

PROENÇA, M. C. *Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio*. 2008. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2008.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono. *Zetetiké*, v. 17, n. 31, p. 12-46, 2009. Disponível em: <www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/issue/view/194>. Acesso em: 15 out. 2015.

_____. O conhecimento de polígonos e poliedros: uma análise do desempenho de alunos do ensino médio em exemplos e não exemplos. *Ciência & Educação*, v. 17, n. 1, p. 199-217, 2011. Disponível em: <www.redalyc.org/articulo.oa?id=251019455013>. Acesso em: 15 out. 2015.

RIO DE JANEIRO (Estado). Secretaria da Educação. *Revista do Professor de Avaliação: Saerj-2008*, Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd, v. 1, jan./dez. 2008. Disponível em: <www.avaliacaoexternasaerj.caedufjf.net/wp-content/uploads/2012/05/BoletimPedagogicoMat3AnoEMSAERJ2008.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2014.

SANTOS, A. C. C. *Recursos didáticos e representações da geometria espacial da 4ª série do ensino fundamental de uma escola de Campo Grande-MS*. 2003. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2003.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Matrizes de referência para a avaliação Saesp: documento básico*. Coordenação de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009. Disponível em: <<http://saesp.fde.sp.gov.br/2007/subpages/provas.html>>. Acesso em: 25 jun. 2014.

TATSIS, K.; MOUYSIOS-RENTZOS, A. Preservice teachers describe geometrical figures: the “broken phone” revisited. In: LINDMEIER, A. M.; HEINZE, A. (Ed.). CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 37., 2013, Kiel, Germany. *Proceedings...* Kiel, Germany: PME, 2013. n. 4, p. 129-136.

VAN HIELE, P. *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Orlando: Academic, 1986.

VASCONCELOS, M. *Figuras geométricas não planas: a aprendizagem de alunos da 4ª série e as concepções de seus professores*. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2004.

VIANA, O. A. *O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e níveis de conceito*. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

_____. Conceitos e habilidades espaciais requeridos pelas questões de geometria do ENC/Enade para a licenciatura em Matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 22, n. 34, p. 153-184, 2009.

_____. A avaliação em geometria espacial feita pelo Simave. *Estudos em Avaliação Educacional*, São Paulo, v. 21, n. 47, p. 505-528, 2010.

_____. A identificação de propriedades e a habilidade de planificação de figuras geométricas espaciais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. *Anais...* Petrópolis: SIPEM, 2012. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT09/CC00596629800_A.pdf>. Acesso em: 4 nov. 2015.

_____. Planificação e área total de paralelepípedo: análise das representações pictóricas de alunos do ensino básico. *Ciências & Cognição*, Rio de Janeiro, v. 19, n. 3, p. 368-383, 2014.

ODALÉA APARECIDA VIANA

Professora da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Ituiutaba, Minas Gerais, Brasil
odalea@pontal.ufu.br

Recebido em: JULHO 2014

Aprovado para publicação em: NOVEMBRO 2015