

<https://doi.org/10.18222/eae.v37.12573>

NOVAS CONSIDERAÇÕES SOBRE COMO MEDIR DESIGUALDADE DE PROFICIÊNCIAS

 RODOLFO HOFFMANN¹

¹ Universidade de São Paulo (USP), Piracicaba-SP, Brasil; hoffmannr@usp.br

RESUMO

Vou discutir alguns dos temas abordados na resposta de Soares e Ernica (2025) à minha crítica (Hoffmann, 2025) do uso da divergência de Kullback-Leibler na avaliação de proficiências em testes educacionais. Primeiro procuro deixar claro que as medidas de desigualdade de Theil não são casos particulares da divergência de Kullback-Leibler. Depois reconheço a importância de distinguir a desigualdade de oportunidades na obtenção de proficiências adequadas, mas ressalto que é válido e relevante considerar essa desigualdade como uma parcela da desigualdade total. Reconheço, também, que a análise da distribuição relativa pode ser uma metodologia muito útil; porém, no último tópico, destaco que o mais simples e claro é usar medidas clássicas de tendência central, dispersão, desigualdade e assimetria.

PALAVRAS-CHAVE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL • DESIGUALDADES EDUCACIONAIS • DIVERGÊNCIA DE KULLBACK-LEIBLER.

COMO CITAR:

Hoffmann, R. (2026). Novas considerações sobre como medir desigualdade de proficiências. *Estudos em Avaliação Educacional*, 37, Debate e12573. <https://doi.org/10.18222/eae.v37.12573>

NUEVAS CONSIDERACIONES SOBRE CÓMO MEDIR LA DESIGUALDAD DE SUFICIENCIAS

RESUMEN

Voy a discutir algunos de los temas abordados en la respuesta de Soares y Ernica (2025) a mi crítica (Hoffmann, 2025) sobre el uso de la divergencia de Kullback-Leibler en la evaluación de suficiencias en pruebas educativas. En primer lugar busco dejar claro que las medidas de desigualdad de Theil no constituyen casos particulares de la divergencia de Kullback-Leibler. Posteriormente reconozco la importancia de distinguir la desigualdad de oportunidades en la consecución de suficiencias adecuadas; no obstante, subrayo que es válido y relevante considerar dicha desigualdad como un componente de la desigualdad total. Asimismo, reconozco que el análisis de la distribución relativa puede representar una metodología de gran utilidad, aunque en el último apartado enfatizo que lo más sencillo y claro consiste en emplear medidas clásicas de tendencia central, dispersión, desigualdad y asimetría.

PALABRAS CLAVE EVALUACIÓN EDUCATIVA • DESIGUALDADES EDUCATIVAS • DIVERGENCIA DE KULLBACK-LEIBLER.

NEW CONSIDERATIONS ON HOW TO MEASURE PROFICIENCY INEQUALITY

ABSTRACT

I will discuss some of the issues addressed in Soares and Ernica's (2025) response to my critique (Hoffmann, 2025) of the use of the Kullback-Leibler divergence in assessing proficiency in educational tests. First, I seek to clarify that Theil's measures of inequality are not special cases of the Kullback-Leibler divergence. I then acknowledge the importance of distinguishing inequality of opportunity in achieving adequate proficiency levels, while emphasizing that it is valid and relevant to consider this inequality as a component of total inequality. I also recognize that the analysis of relative distributions can be a very useful methodology; however, in the final section I argue that the simplest and clearest approach is to use traditional measures of central tendency, dispersion, inequality, and asymmetry.

KEYWORDS EDUCATIONAL ASSESSMENT • EDUCATIONAL INEQUALITIES • KULLBACK-LEIBLER DIVERGENCE.



Este é um texto de acesso aberto distribuído nos termos da licença Creative Commons do tipo BY.

OS ÍNDICES DE DESIGUALDADE DE THEIL

Nenhuma das medidas de desigualdade criadas por Theil (1967) “é um caso particular da divergência de Kullback-Leibler”, como afirmam Soares e Ernica (2025, p. 10). O próprio Theil (1967) explica que a criação das duas medidas de desigualdade (T e L), inspiradas na teoria da informação, envolveu a mudança conceitual em uma variável. Lembremos que, no caso de duas distribuições discretas de uma variável com valores x_i ($i = 1, \dots, n$) com probabilidades $Q(x_i)$ e $P(x_i)$ para cada um dos diferentes valores de x_i , a divergência de Kullback-Leibler de Q para P ou ganho de informação quando se passa da distribuição Q para a distribuição P , é dada por

$$K(P \parallel Q) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \log \frac{P(x_i)}{Q(x_i)} \quad (1)$$

Note-se que x_i pode até ser uma variável nominal, isto é, ser uma classificação em n categorias. Podemos calcular, por exemplo, a divergência de Kullback-Leibler da distribuição dos brasileiros, conforme sua cor, de 2004 para 2024. Para calcular (1), precisamos das proporções de pessoas de cada cor nos dois anos.

Para criar uma medida da desigualdade da distribuição da renda (ou de qualquer outra variável quantitativa) entre n pessoas, Theil percebeu que a proporção da renda total apropriada por cada pessoa (y_i , com $i = 1, 2, \dots, n$) tem propriedades matemáticas iguais a uma probabilidade $P(x_i)$. Após outras etapas,¹ ele chegou à medida de desigualdade da distribuição da renda

$$T = \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{y_i}{1/n} \quad (2)$$

Há uma grande analogia formal entre (1) e (2). A probabilidade $P(x_i)$ é substituída pela participação (y_i) de cada pessoa na renda total,² e a probabilidade $Q(x_i)$ é substituída pela participação de cada pessoa na população. Mas é claro que (2) não é um “caso particular” de (1).

Diferentemente do que afirmam Soares e Ernica (2025, p. 10), a minha recomendação foi abandonar o uso da divergência de Kullback-Leibler apenas na análise de notas ou proficiências, mas não em outras aplicações. E a recomendação de abandonar o uso da divergência de Kullback-Leibler na análise de proficiências se deve à minha convicção de que os problemas relevantes podem ser analisados de maneira mais

1 Uma apresentação didática mais completa do processo pode ser encontrada no capítulo 4 de Hoffmann et al. (2019).

2 Ao calcular o T de Theil para uma distribuição de proficiências, seria a participação de cada aluno na soma de todas as proficiências.

simples e clara usando medidas tradicionais de tendência central (média e mediana), dispersão (variância e desvio padrão), desigualdade (coeficiente de variação, índice de Gini e medidas *T* e *L* de Theil) e assimetria. Procurei justificar essa convicção com a análise dos exemplos numéricos artificiais apresentados nas tabelas 1 e 2 de Hoffmann (2025), não comentada por Soares e Ernica (2025).

DESIGUALDADE DE OPORTUNIDADES

Tanto na distribuição da renda como na distribuição de proficiências, é importante distinguir a desigualdade total da desigualdade de oportunidades. O conceito de desigualdade de oportunidades está bem discutido em Ernica et al. (2025, p. 13). Trata-se da desigualdade que pode ser atribuída a circunstâncias da vida da pessoa as quais ela não teve possibilidade de escolher (interferir). Diferenças de renda ou proficiências devidas a maior ou menor esforço pessoal podem ser defendidas como incentivos válidos, mas diferenças associadas àquelas circunstâncias são injustas e precisam ser evitadas.

Se, além das proficiências, tivermos informações sobre as circunstâncias a que cada aluno é submetido (incluindo *status* socioeconômico da família, cor, sexo, região de residência e características da escola), podemos fazer uma classificação pormenorizada com base nessas circunstâncias e calcular uma medida da desigualdade (como o *T* de Theil) das proficiências entre as categorias. Essa seria uma estimativa da desigualdade de oportunidades na obtenção dessas proficiências sintética bem mais apropriada do que o conjunto das divergências de Kullback-Leibler referentes às

. . . distâncias entre a distribuição das proficiências de pessoas de nível socioeconômico mais baixo e a de pessoas de nível socioeconômico mais alto, entre a distribuição das proficiências das pessoas autodeclaradas pretas e a das pessoas autodeclaradas brancas, entre a distribuição das proficiências das meninas e a dos meninos. (Ernica et al., 2025, p. 19).

Com base em dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), disponibilizados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), Alves (2025) calculou a média e o índice de Gini das distribuições das proficiências nas disciplinas de língua portuguesa e matemática para alunos do 5º ano do ensino fundamental, de 1995 a 2021, distinguindo escolas públicas e escolas privadas (Alves, 2025, pp. 63-64, figuras 16 e 17). A média nas escolas privadas é sempre maior do que nas escolas públicas, e o índice de Gini é quase sempre maior nas escolas públicas. Essas diferenças indicam a existência de desigualdade de oportunidades, pois os alunos das escolas públicas pertencem a famílias que são, em geral, mais pobres, e as condições de aprendizagem nessas escolas são, em média, piores do que nas escolas privadas.

Pode-se constatar que há uma tendência decrescente no índice de Gini para os alunos de escolas privadas, mas não para os alunos de escolas públicas. Observa-se que as proficiências médias nas duas disciplinas mostram tendência crescente de 2001 a 2019 e estabilidade ou queda de 2019 a 2021, sendo a queda mais acentuada nas escolas públicas. Nota-se, ainda, aumento do índice de Gini de 2019 a 2021. O comportamento desses indicadores de 2019 a 2021 certamente está relacionado com a pandemia de covid-19 a partir de 2020, inclusive com interrupção das aulas, sendo que o aumento da desigualdade e da diferença entre proficiências médias de escolas públicas e privadas se deve ao fato de que os mais pobres ficaram mais limitados no acesso a sistemas de ensino a distância.

O uso da divergência de Kullback-Leibler permitiria mostrar esses fenômenos com mais clareza?

Considero importante comparar diferentes grupos ou categorias de alunos e me parece relevante comparar diversas características das respectivas distribuições de proficiências, como tendência central, dispersão, desigualdade e assimetria. E não vejo razão para desconsiderar que tais comparações integram uma análise da desigualdade geral. Para medidas de desigualdade como o T e o L de Theil, quando a população é dividida em categorias mutuamente exclusivas e exaustivas, a desigualdade total é igual à soma da desigualdade entre categorias com a desigualdade dentro das categorias.

Vamos admitir que estejam sendo consideradas categorias para as quais a desigualdade entre elas represente desigualdade de oportunidades. Se for constatado que a desigualdade global está crescendo e for razoável admitir que a desigualdade dentro das categorias seja estável, podemos considerar, só com base na desigualdade global, que há indicação de crescimento de desigualdade de oportunidades. De qualquer maneira, não é a comparação da distribuição de proficiências no Brasil com uma distribuição baseada em dados médios de um conjunto de países desenvolvidos que vai garantir que se esteja medindo a desigualdade de oportunidades, pois certamente tal tipo de desigualdade também existe naqueles países.

A DISTRIBUIÇÃO RELATIVA

Soares e Ernica (2025, p. 9) explicitam que a opção pela metodologia utilizada “se estrutura em torno do conceito de distribuição relativa, descrito completamente em Handcock e Morris (1998)”. Conforme está explicado em Handcock e Morris (1999), dadas duas distribuições contínuas com funções de densidade de probabilidade $q(x)$ e $p(x)$ e funções de distribuição acumulada $Q(x)$ e $P(x)$, respectivamente, a distribuição relativa (com base na distribuição $Q(x)$) é obtida atribuindo a $r = Q(x)$ a função de distribuição acumulada

$$G(r) = P(Q^{-1}(r)) \quad (3)$$

com $Q^{-1}(\cdot)$ indicando a inversa da função $Q(\cdot)$. Deduz-se, então, que a função de densidade de probabilidade de r é

$$g(r) = \frac{p(Q^{-1}(r))}{q(Q^{-1}(r))} \quad (4)$$

Pode-se verificar que a divergência de Kullback-Leibler de Q para P , definida por

$$K(P \parallel Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad (5),$$

é igual ao negativo da entropia da distribuição relativa, que é dado por

$$K(P \parallel Q) = \int_0^1 g(r) \log(g(r)) dr \quad (6)$$

A distribuição relativa tem muitas aplicações na análise de variáveis socioeconômicas, mas cabe advertir a existência de questões relacionadas ao rigor estatístico no livro de Handcock e Morris (1999). Falta clareza na distinção entre os conceitos de desigualdade e polarização e propõe-se o uso de uma medida de polarização que é uma medida de desigualdade entre as duas metades da distribuição. Isso levou a diversos artigos com resultados errados sobre a evolução da polarização da distribuição da renda em muitos países, inclusive o Brasil (ver Hoffmann & Kassouf, 2025).

A DIVERGÊNCIA EM RELAÇÃO A UMA REFERÊNCIA

Não contesto a validade e a relevância de comparar uma distribuição de proficiências com uma distribuição de referência previamente definida. Mas essa comparação não deve se basear exclusivamente no cálculo da divergência de Kullback-Leibler.

Para ilustrar meu argumento, vamos admitir que temos uma distribuição de referência normal com média 70 e variância 16.

A divergência de Kullback-Leibler de uma distribuição normal com média 65,4 e variância 16 para aquela referência³ é 0,66 (arredondando na segunda decimal). Note-se que nessa comparação a divergência se deve apenas à diferença no valor da média.

3 Note-se o sentido da divergência, da distribuição observada para a distribuição de referência, como especificado em Soares e Delgado (2016).

A divergência de Kullback-Leibler de uma distribuição normal com média 70 e variância 146 para aquela referência também é 0,66 (arredondando na segunda decimal). Note-se que nessa comparação a divergência se deve apenas à diferença no valor da variância.

A divergência de Kullback-Leibler de uma distribuição normal com média 63,38 e variância 64 para aquela referência também é 0,66 (arredondando na segunda decimal). Note-se que nessa comparação a divergência se deve a mudanças tanto na média como na variância.

Esse exemplo deixa claro que, quando comparamos uma distribuição com uma referência e obtemos o valor da divergência de Kullback-Leibler, não sabemos se tal valor se deve a diferenças na tendência central, na dispersão ou uma combinação dos dois fenômenos. Para esclarecer a questão, teríamos que, em seguida, calcular as médias e variâncias. Não seria melhor, então, calcular diretamente as medidas de tendência central e dispersão das duas distribuições?

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a Josimar Gonçalves de Jesus pelas observações sobre uma versão preliminar deste texto.

REFERÊNCIAS

- Alves, D. B. (2025). *Índices de desigualdades educacionais: Um estudo para o Brasil* [Tese de doutorado, Universidade de São Paulo]. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP. <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/11/11132/tde-16092025-112834/pt-br.php>
- Ernica, M., Rodrigues, E. C., & Soares, J. F. (2025). Desigualdades educacionais no Brasil contemporâneo: Definição, medida e resultados. *Dados*, 68(1), Artigo e20220109. <https://doi.org/10.1590/dados.2025.68.1.345>
- Handcock, M. S., & Morris, M. (1999). *Relative distribution methods in the social sciences*. Springer.
- Hoffmann, R. (2025). Sobre como medir diferenças de resultados no ensino. *Estudos em Avaliação Educacional*, 36, Artigo e10663. <https://doi.org/10.18222/eae.v36.10663>
- Hoffmann, R., Botassio, D. C., & Jesus, J. G. de. (2019). *Distribuição de renda: Medidas de desigualdade, pobreza, concentração, segregação e polarização* (2ª ed.). Edusp.
- Hoffmann, R., & Kassouf, A. L. (2025). Measuring and mismeasuring income polarization. *Social Indicators Research*, 177, 787-807. <https://doi.org/10.1007/s11205-025-03535-8>
- Soares, J. F., & Delgado, V. M. S. (2016). Medida das desigualdades de aprendizado entre estudantes de ensino fundamental. *Estudos em Avaliação Educacional*, 27(66), 754-780. <https://doi.org/10.18222/eae.v27i66.4101>
- Soares, J. F., & Ernica, M. (2025). O conceito rege o método: Uma resposta a Hoffmann. *Estudos em Avaliação Educacional*, 36, Debate e12270. <https://doi.org/10.18222/eae.v36.12270>
- Theil, H. (1967). *Economics and information theory*. North-Holland; Rand McNally.